

**Ein Beitrag zur automatischen Entwicklung
eines linearen dynamischen Modelles
für stationär betriebene verfahrens-
technische Anlagen**

Untersuchungen an einer Aufstromkolonne

von
Wolfgang Bär

Erlangen 1974

1974 # 275

Ein Beitrag zur automatischen Entwicklung eines linearen dynamischen Modelles für stationär betriebene verfahrens- technische Anlagen

Untersuchungen an einer Aufstromkolonne



Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR

vorgelegt
von
Wolfgang Bär

Erlangen 1974



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 28. April 1974

Tag der Promotion: 28. Juni 1974

Dekan: Prof. Dr. H. Schlitt

Berichterstatter: Prof. Dr. H. Schlitt

Prof. Dr. H. Hofmann

Einleitung.....	1
<u>Teil I : Dynamisches Modell einer Aufstromkolonne:</u>	
<u>Diffusionsmodell.....</u>	3
I.1. Entwicklung einer Modellvorstellung für einen kontinuierlich durchströmten Reaktor.....	3
I.1.A Stoffbilanz-Diffusionsmodell.....	4
I.1.B Wahrscheinlichkeitstheorie- Markovprozeß.....	6
I.1.C Herleitung der Anfangs- und Randbedingungen.....	12
I.1.D Formulierung der Systemgleichungen.....	14
I.2. Meßaufbau, Testsignale, Versuche, Beschreibung der Experimentierkolonnen.....	14
I.2.A Einige Überlegungen zu den verschiedensten Testsignalen.....	17
I.2.A.1 Nichtperiodische Testsignale.....	18
I.2.A.2 Periodische Testsignale.....	19
I.2.A.3 Stochastische Testsignale.....	19
I.2.B Meßandordnung- Anmerkungen zu den statistischen Eigenschaften des Testsignals.....	21
I.2.C Meßtechnische Modifikation der Signalerzeugung..	26
I.2.D Versuchsdurchführung.....	28
I.3. Möglichkeiten der Berechnung des Verhaltens eines Diffusionsreaktors.....	29
I.3.A Geschlossene Lösung der Diffusionsgleichung.....	29
I.3.A.1 Zweiseitig unendlich langer Reaktor; $D_a = D = D_b$	34
I.3.A.2 Einseitig unendlich langer Reaktor; $D_b = 0, D_a = D$	40
I.3.B Einige Anmerkungen zur Simulation des Reaktor- verhaltens auf dem Hybridrechner.....	45
I.4. Datenaufbereitung und -transfer.....	54
I.4.A Allgemeines.....	54
I.4.B Kurzbeschreibung des Digitalprogramms "Datenaufbereitung und -transfer".....	56

I.4.C	Grundlagen zur Ermittlung der Laufparameter.....	63
I.4.D	Datentransfer zur Magnetplatte des Hybrid- systems.....	66
I.5	Ermittlung der Bodensteinzahl aus den gemessenen Ausgangs/Eingangs-Signalfolgen.....	69
I.5.A	Zur Bestimmung der Bodensteinzahl aus der Korrelations- und Gewichtsfunktion.....	69
I.5.B	Anmerkungen zur digitalen Signalverarbeitung....	73
I.5.B.1	Abtastfrequenz.....	73
I.5.B.2	Meßzeit T.....	76
I.5.C	Berechnung von Leistungsdichtespektren.....	77
I.5.C.1	Grundzüge der digitalen Berechnung.....	77
I.5.C.2	Schnelle Fouriertransformation.....	81
I.5.C.3	Kreuzleistungsdichte, Rücktrans- formation von Gl. (43).....	85
I.5.D	Anmerkungen zum ausgeführten Digitalprogramm....	90
I.6	Meßergebnisse und Kritik.....	95
 <u>Teil II : Entwicklung eines diskreten dynamischen Modells:</u>		
	<u>Maximum-Likelihood-Methode</u>	100
II.1.A	Wahl der Modellvorstellung.....	100
II.1.B	Allgemeines zur Identifizierung eines kontinuierli- chen Systems mit Hilfe eines zeitlich diskreten Modells.....	102
II.2	Beschreibung zeitlich diskreter Systeme.....	107
II.2.A	Formulierung der Systemgleichungen der diskreten Modellvorstellung.....	109
II.2.B	Einführung der Anfangsbedingungen.....	115
II.3	Zur Wahl des Identifizierungsverfahrens.....	116
II.3.A	Allgemeines zur Schätzung von Parametern.....	116
II.3.B	Lösung der M.L.-Gleichung.....	119
II.3.B.1	Bestimmung der partiellen Ableitun- gen erster Ordnung.....	126

II.3.B.2	Bestimmung der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.....	128
II.3.B.3	Lösung linearer inhomogener Vektordifferenzgl.....	131
II.3.B.4	Zur numerischen Bestimmung von $\underline{V}_\theta$ und $\underline{V}_{\theta\theta}$	133
II.3.B.5	Entwicklung des Digitalprogramms.....	136
II.3.B.6	Mehrdeutigkeiten der Lösung, Wahl der Startwerte, Rechnen mit genäher-ten zweiten Ableitungen.....	147
II.3.B.7	Beispiel.....	150
II.4	Bestimmung der s-Übertragungsfunktion.....	151
II.5	Meßergebnisse.....	154
II.6	Abgrenzung und Wertung des statistischen Schätzverfahrens.....	163
	Zusammenfassung.....	166
	Literaturverzeichnis.....	167
	Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Abkürzungen.....	171



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548410_0008

Einleitung

Um die Verfahren der Regelungstheorie im Bereich industrieller Anlagen anzuwenden, muß das Verhalten der Regelstrecken genügend genau bekannt sein und in Form eines mathematischen Modells vorliegen.

An die mathematischen Modelle sind hierbei im wesentlichen zwei Forderungen zu stellen: einerseits müssen sie den physikalisch-chemischen Zusammenhängen möglichst genau entsprechen, andererseits muß die Modellvorstellung einfach genug sein, damit eine Regelung oder auch die Identifikation der Strecke selbst mit vertretbarem technischen Aufwand in möglichst geringer Zeit erreicht werden kann. Wird eine digitale Signalverarbeitung vorgenommen, so muß darüberhinaus auf den erforderlichen Speicherplatz geachtet werden.

Da die erwähnten Forderungen sich meist widersprechen, besteht die Aufgabe der Identifizierung der Regelstrecke darin, einen geeigneten Kompromiß zu schließen.

Ausgangspunkt aller Überlegungen ist dabei immer die theoretische Analyse aufgrund von physikalisch-chemischem a priori - Wissen. Im folgenden Beitrag zur Entwicklung eines dynamischen Modells einer Aufstromkolonne (Füllkörperkolonne) wird daher zunächst auf zwei verschiedenen Wegen eine mathematische Beschreibung der Regelstrecke hergeleitet, die zu einer partiellen Differentialgleichung (Diffusionsgleichung) führt. Die Ermittlung der Beiwerte dieser Gleichung - zusammengefaßt in der Bodensteinzahl B_0 - erfolgt mit Hilfe von stochastischen Testsignalen, die an geeigneter Stelle die Füllkörperkolonne beaufschlagen. Wegen des im Gegensatz zu deterministischen Testsignalen sehr niedrigen Signalpegels der Rauschsignale kann man davon ausgehen, daß die Füllkörperkolonne entsprechend dem Ansatz durch das Diffusionsmodell als linear betrachtet werden kann.

Darüberhinaus beeinflussen noch vorhandene - von den Testsignalen statistisch unabhängige - Störsignale den Identifikationsvorgang nur unwesentlich.

Das aus den Bilanzgleichungen bzw. aus statistischen Überlegungen gewonnene Modell genügt nun hinsichtlich seiner Struktur vielfach nicht der erwähnten Forderung nach Einfachheit. Hinzu kommt, daß häufig bei Regelstrecken mit örtlich verteilten Parametern die Ortsabhängigkeit des Übertragungsverhaltens nur untergeordnete Bedeutung besitzt, da i.a. nur wenige Meß- und Stellmöglichkeiten vorhanden sind. Es ist daher nötig und möglich, die transzendenten Übertragungsfunktionen durch rationale zu approximieren. Dieser Weg wird im zweiten Teil dieser Arbeit beschritten, in dem ausgehend von einer allgemeinen Modellvorstellung für ein lineares System mit einem Eingang und einem Ausgang mit Hilfe der MAXIMUM-LIKELIHOOD-Methode ein stochastisches dynamisches Modell für die einphasige und zweiphasige Aufstromkolonne hergeleitet wird. Die dazu nötigen Digitalprogramme werden dabei ebenso ausführlich beschrieben wie die automatisch auf der Hybridrechenanlage EAI 690 ablaufenden Arbeitszyklen.

Teil I : Dynamisches Modell einer Aufstromkolonne:

DIFFUSIONSMODELL.

I.1 Entwicklung einer Modellvorstellung für einen kontinuierlich durchströmten Reaktor

In der Technik werden für die verschiedensten Probleme des Wärme- und Stoffaustausches Füllkörperkolonnen verwendet, in denen die meist kontinuierlich durchströmenden Flüssigkeiten und Gase (Phasen) miteinander in Berührung gebracht werden. Von den einphasig durchströmten Füllkörperkolonnen seien hier chemische Reaktoren, bei denen die Füllkörper als Katalysatoren dienen, und Kernreaktoren erwähnt. Die in einer Füllkörperkolonne übertragenen Wärme- und Stoffmengen sind dabei proportional der Austauschfläche, die von den Füllkörpern erzeugt wird. Da diese somit in erster Linie für die Bildung einer ausreichend großen Oberfläche pro Volumeneinheit verantwortlich sind, ist ihre Form von entscheidender Bedeutung. Außerdem soll der Weg der Phasen in der Füllkörperschicht möglichst lang und die Strömung so sein, daß sich die für den Wärme- und Stoffaustausch günstigsten Verhältnisse ergeben; deshalb spielt auch die Anordnung der Füllkörper eine große Rolle. Eine Füllkörperschicht wird i.a. durch einen Schüttvorgang erzeugt, so daß ihre Struktur nur durch Wahrscheinlichkeitsgesetze gekennzeichnet werden kann. Eine wichtige Form der Füllkörperkolonnen, bei denen die sich mischenden Phasen im Gleichstrom den Apparat durchsetzen, ist die Aufstromkolonne, die in der vorliegenden Arbeit experimentell untersucht und im Hinblick auf eine regelungstechnische Modellbildung betrachtet wurde.

Ehe eine mathematische Beschreibung des untersuchten Reaktors entwickelt wird, sollen noch einige grundlegende Zusammenhänge aufgezeigt werden. Zur Beurteilung des Ablaufs einer chemischen Reaktion z.B. des kontinuierlichen Mischvorganges in einer Füllkörperkolonne ist die sogenannte Verweilzeitverteilung von entscheidender Bedeutung, /1/. Verweilzeit ist dabei die Zeit, während der ein einzelnes Teilchen im Bilanzraum verweilt. Sieht man von einigen wenigen Fällen ab, so sind die individuellen Verweilzeiten der einzelnen Teilchen wegen der unterschiedlichen Bewegungspfade i.a. verschieden groß : d.h. man muß den Vorgang der Bewegungen im Reaktorraum durch eine Verweilzeitverteilung oder allgemeiner durch Wahrscheinlichkeitsgesetze beschreiben.

Diese Verweilzeitverteilung (oder das entsprechende Verweilzeitspektrum) bestimmt dann zusammen mit der Reaktionsgeschwindigkeit /1/ den Grad des Umsatzes im Reaktor und damit die Mengenanteile der entstehenden Stoffe. Regelungstechnisch gesprochen entspricht das Verweilzeitspektrum - wie man bei der statistischen Herleitung der Modellvorstellung sieht - der Gewichtsfunktion des Systems: im untersuchten Fall also unter gewissen Bedingungen der Antwort des Reaktors, dem Konzentrationsverlauf am Ausgang des Bilanzraumes, auf eine impulsförmige Änderung der Konzentration am Eingang. Die Ermittlung der Verweilzeitverteilung eines kontinuierlich durchströmten Reaktors geschieht einmal durch die Bestimmung der Differentialgleichungen für die Erhaltung von Masse, Energie und Impuls (Bilanzgleichungen), zum anderen aber auch aus der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Vorgänge innerhalb einer Reaktionsstrecke. Im folgenden soll zunächst die anschaulichere erste Methode /1/ beschrieben werden, um dann vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt aus ein Modell für eine Aufstromkolonne zu entwickeln /2/.

I.1.A Stoffbilanz - Diffusionsmodell

Zur Aufstellung der Bilanzgleichungen sind gewisse Modellvorstellungen über die inneren physikalischen Vorgänge im Reaktor nötig. In der mehrfach erwähnten Literatur /1/ werden die möglichen Modelle ausführlich diskutiert und auf ihre Anwendung und mathematische Lösbarkeit untersucht. Da das Diffusionsmodell den inneren Transportmechanismus der einzelnen Teilchen als das Ergebnis der Überlagerung zufälliger Bewegungen im Reaktorraum am besten kennzeichnet, sei von diesem Ansatz ausgegangen.

Betrachtet man in einem kontinuierlich durchströmten Reaktor ein raumfestes Volumenelement V , das nicht notwendigerweise differentiell klein sein muß, so gilt für jede i -te Stoffkomponente die folgende Stoffbilanzgleichung /3/:

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j \cdot \frac{\partial c_{ij}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^m \operatorname{div} (c_{ij} \cdot v_j) + \sum_{j=1}^m \operatorname{div} (D_{eff,j} \cdot \operatorname{grad} c_{ij}) \quad (1)$$

$$+ v_i \cdot r_{eff} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

sowie für die Wärmebilanz

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j \bar{c}_{p,j} c_{g,j} \frac{\partial T}{\partial t} = - \sum_{j=1}^m \bar{c}_{p,j} c_{g,j} (v_j \text{grad } T) + \sum_{j=1}^m (\lambda_{eff,j} \cdot \text{grad } T) - \Delta H \cdot r_{eff} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

wobei der Index j die jeweilige Phase kennzeichnet.

Für den untersuchten Fall einphasiger bzw. zweiphasiger Aufstromkolonnen geht die Gl.(1) über in (1a) :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = - \text{div} (\kappa \cdot \underline{v}) + \text{div} (D \cdot \text{grad } \kappa) , \quad (1a)$$

während Gl.(2) wegen vernachlässigbarer Reaktion ganz entfällt. Dabei wurde gleichzeitig davon ausgegangen, daß bei zweiphasigem Reaktor wegen der nur geringen Löslichkeit der Gasphase in der Flüssigkeitsphase die entsprechenden Summenglieder unberücksichtigt bleiben können. Die Gasphase in der Zweiphasenströmung trat bei den untersuchten Reaktoren in Form von aufsteigenden Gasblasen auf. Diese verursachten im wesentlichen eine Erhöhung der Turbulenz in der flüssigen Phase und bewirkten dadurch eine Vergrößerung des Diffusions- bzw. Dispersionskoeffizienten D. Darüberhinaus hat die Gasphase auch einen Einfluß auf die effektive Strömungsgeschwindigkeit der zusammenhängenden flüssigen Phase, indem sie das für die Flüssigkeit zwischen den Füllkörpern zur Verfügung stehende Volumen einengt.

Ausführlicher folgt aus Gl.(1a)

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = - \kappa \cdot \text{div } \underline{v} - \underline{v} \cdot \text{grad } \kappa + D \cdot \text{div grad } \kappa + \text{grad } \kappa \cdot \text{grad } D ,$$

$$\text{div grad } \kappa = \nabla^2 \kappa = \Delta \kappa . \quad (1b)$$

Für die untersuchte zylindrische Aufstromkolonne können nun noch weitere Vereinfachungen eingeführt werden. Zunächst kann man annehmen, daß die Strömungsgeschwindigkeit $\underline{v}$ im ganzen Reaktionsraum konstant und das Konzentrationsprofil quer zur Strömungsrichtung des Reaktors eben ist, (Vernachlässigung des Einflusses der Randzonen). Daraus folgt sofort, daß

$$\text{grad } c = n_z \cdot \frac{\partial c}{\partial z}, \quad \text{wenn } z \text{ die Axialkoordinate des Reaktors ist; weiterhin folgt}$$

$$\nabla^2 c = \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}.$$

Gl.(1b) gibt an, daß alle Vermischungsvorgänge durch einen einzigen Diffusions- bzw. Dispersionskoeffizienten D in axialer Richtung gekennzeichnet werden können, der darüberhinaus wegen der Homogenität der Füllkörperkolonne näherungsweise als konstant für den gesamten Reaktionsraum angenommen werden kann. Es folgt als endgültige Ausgangsgleichung für eine Modellvorstellung der Aufstromkolonne:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + v \frac{\partial c}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung für die Randbedingungen, die den untersuchten Aufstromkolonnen zugrunde lagen, soll später im einzelnen erläutert werden, wenn die folgenden statistischen Überlegungen zur Modellvorstellung der Füllkörperkolonne abgeschlossen sind.

1.1.B Wahrscheinlichkeitstheorie - Markovprozeß

Bei einem in Bild 1 schematisch dargestellten Reaktor treten die Teilchen an der Stelle $z = 0$ in den Reaktionsraum ein, wo infolge Schüttung inerter Füllkörper eine Vermischung bzw. hohe Turbulenz herbeigeführt wird. Ein individuelles Teilchen wird durch die der Anlage aufgeprägten Strömung seine Lage ständig verändern und auf einer zufälligen Bahn durch den Bilanzraum laufen.

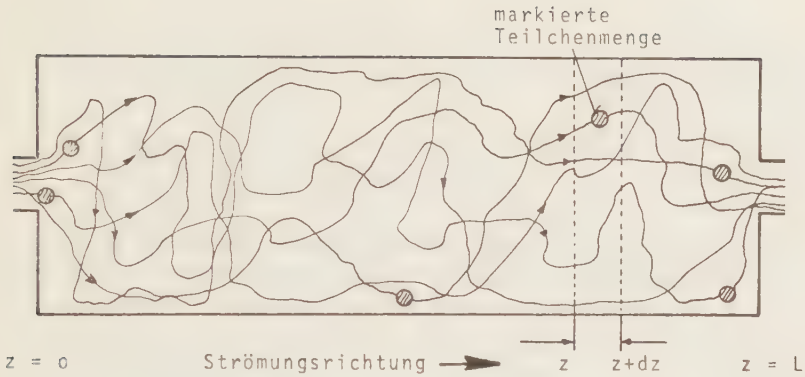


Bild 1 : Schema des Reaktionsraumes mit individuellen Bewegungsbahnen einzelner markierter Teilchen

Die Änderung der Lage z , wo sich das Teilchen befindet, kann durch einen stochastischen Prozeß beschrieben werden /4/.

Kennt man nun die Eigenschaften dieses stochastischen Prozesses, so kann die Wahrscheinlichkeit der Lage z des Teilchens zu einem beliebig späteren Zeitpunkt $t_1 + t$ angegeben werden, wenn die Ausgangslage zum Startzeitpunkt t_1 bekannt war. Hängt diese Wahrscheinlichkeit nicht davon ab, wie der Prozeß zum Ausgangszustand (z_1, t_1) gekommen ist, so handelt es sich um einen MARKOV-Prozeß.

Definition:

Ein kontinuierlicher oder diskreter stochastischer Prozeß $\{z_t, t \in T\}$ wird MARKOV-Prozeß genannt, falls für jede beliebige endliche Parametermenge $\{t_i : t_i < t_{i+1}\} \in T$ und für jeden reellen Parameter λ gilt:

$$\text{Pr.} \{x_{t_n}(\omega) \leq \lambda \mid x_{t_1}, \dots, x_{t_{n-1}}\} = \text{Pr.} \{x_{t_n}(\omega) \leq \lambda \mid x_{t_{n-1}}\}. \quad (4)$$

Für einen kontinuierlichen Prozeß gilt Gl.(4) entsprechend und zwar in der Form:

$$\Pr \{x_{t_2}(\omega) \leq \lambda \mid x_{t_1}, t_1 \leq t_2\} = \Pr \{x_{t_2}(\omega) \leq \lambda \mid x_{t_1}\} \quad , \quad t_1 < t_2 \quad \lambda \quad .$$

Diese MARKOV-Eigenschaft, die die grundlegende Annahme bei der Untersuchung der stochastischen dynamischen Systeme ist, beinhaltet damit im wesentlichen ein Kausalitätsprinzip : auf die Zukunft kann aus dem Wissen über die Gegenwart geschlossen werden, /5/.

In Form von Wahrscheinlichkeitsdichten lautet die MARKOV-Aussage:

$$p(z_{t_n} \mid z_{t_1}, \dots, z_{t_{n-1}}) = p(z_{t_n} \mid z_{t_{n-1}}) \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n \quad (5)$$

Für die analysierte Anlage bedeutet dies, daß bei der durch ständiges Anstoßen an die Füllkörper gekennzeichneten Bahn des individuellen Teilchens der Ablauf der weiteren Bewegung nicht davon abhängt, wie es in die jeweilige Lage gekommen ist (Prozeß ohne Nachwirkung).

Es soll nun die MARKOV-Eigenschaft noch etwas deutlicher gezeigt werden. Ausgehend von der marginalen Wahrscheinlichkeitsdichte /5/

$$p(z_n \mid z_{n-2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z_n, z_{n-1} \mid z_{n-2}) dz_{n-1} \quad (6)$$

läßt sich für den Integrand von Gl.(6) schreiben

$$p(z_n, z_{n-1} \mid z_{n-2}) = p(z_n \mid z_{n-1}, z_{n-2}) \cdot p(z_{n-1} \mid z_{n-2}) \quad ,$$

und mit der MARKOV-Eigenschaft schließlich

$$p(z_n, z_{n-1} \mid z_{n-2}) = p(z_n \mid z_{n-1}) \cdot p(z_{n-1} \mid z_{n-2}) \quad ,$$

so daß als Kennzeichen für einen MARKOV-Prozeß die abgewandelte Gl.(7) folgt:

$$p(z_n \mid z_{n-2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z_n \mid z_{n-1}) \cdot p(z_{n-1} \mid z_{n-2}) \cdot dz_{n-1} \quad (7a)$$

oder noch ausführlicher:

$$p(z_n, t_n | z_{n-2}, t_{n-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1}) \cdot p(z_{n-1}, t_{n-1} | z_{n-2}, t_{n-2}) \cdot dz_{n-1} \quad (7b)$$

für $t_{n-2} \leq t_{n-1} \leq t_n$.

Die Gleichung (7a) bzw. (7b) wird "CHAPMAN-KOLMOGOROV-Gleichung" genannt; sie ist Ausgangspunkt zur Herleitung der FOKKER-PLANCK'schen Differentialgleichung, die das Verhalten des Reaktors charakterisiert. Diese partielle Differentialgleichung, der die noch unbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1})$ unter gewissen Bedingungen genügt und die den stetigen zufälligen Prozeß ohne Nachwirkungen (MARKOV-Prozeß) festlegt, wurde, obwohl von FOKKER-PLANCK bereits vorher gefunden, zum ersten Male von A.N. Kolmogorov streng bewiesen. Die Herleitung dieser Gleichung ist in vielen Lehrbüchern der mathematischen Statistik zu finden. Es sei hier nur auf die ausführliche Darstellung in /6/ hingewiesen. Kurz skizziert lauten die Überlegungen wie folgt:

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit des zufälligen Prozesses

$p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1})$, für die die Verteilungsdichte

$$p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1}) = \partial p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1}) / \partial z_n$$

existieren soll, wird vorausgesetzt daß

1. die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1})}{\partial z_{n-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1})}{\partial z_{n-1}^2} \quad (8a)$$

existieren und bei beliebigen Werten z_{n-1}, t_{n-1} und $t_n \geq t_{n-1}$ stetig sind;

2. für jedes $\delta > 0$ die Grenzwerte

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z_n - z_{n-1}| \geq \delta} (z_n - z_{n-1}) dz_n \cdot p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1} - \Delta t) = a(z_n, t_n) \quad (8b)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z_n - z_{n-1}| \geq \delta} (z_n - z_{n-1})^2 dz_n \cdot p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1} - \Delta t) = b(z_n, t_n) \quad (8c)$$

existieren und gleichmäßig bezüglich z_{n-1} konvergieren;

3. die stetigen Ableitungen

$$\frac{\partial p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1})}{\partial t_n}, \quad \frac{\partial [a(z_n, t_n) \cdot p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1})]}{\partial z_n},$$

$$\frac{\partial^2 [b(z_n, t_n) \cdot p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1})]}{\partial^2 z_n} \quad (8d)$$

existieren.

Nach einigen Zwischenrechnungen und unter Benutzung der oben abgeleiteten CHAPMAN-KOLMOGOROV-Gleichung (7b) folgt dann für die Verteilungsdichte (Wahrscheinlichkeitsdichte) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1})}{\partial t_n} = - \frac{\partial [p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1}) a(z_n, t_n)]}{\partial z_n}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 [p(z_n, t_n | z_{n-1}, t_{n-1}) \cdot b(z_n, t_n)]}{\partial^2 z_n} \quad (9a)$$

oder in etwas einfacherer Schreibweise:

$$\frac{\partial p(z, t | y, \tau)}{\partial t} = - \frac{\partial [p(z, t | y, \tau) a(z, t)]}{\partial z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 [p(z, t | y, \tau) b(z, t)]}{\partial z^2} \quad (9b)$$

In dieser Gleichung läßt sich nun die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(z, t | y, \tau)$ durch den Übergang zur totalen Wahrscheinlichkeit $p(z, t)$ eliminieren. Wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße y existiert, gilt nämlich

$$p(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z, t | y, \tau) \cdot p(y, \tau) dy$$

oder

$$p(z,t) = \mathcal{E} \{ p(z,t|y,\tau) \}.$$

Die Bildung des Erwartungswertes von Gl.(9b) führt, nachdem Erwartungswertbildung und Differentiation in der Reihenfolge vertauscht werden dürfen, weil die Erwartungswertbildung eine lineare Operation ist /5/, zu

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial [p(z,t) a(z,t)]}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [p(z,t) b(z,t)]}{\partial z^2} \quad (10)$$

Nachdem die Differentialgleichung abgeleitet wurde, die als Lösung die noch unbekannte Verteilungsdichtefunktion für die Lage eines betrachteten Teilchens hat, besteht die Hauptaufgabe nun darin, eine Lösung für Gl.(10) zu finden. Da dieses allgemein nicht möglich ist, soll Gl.(10) unter Berücksichtigung des untersuchten Reaktors modifiziert werden.. Während in Gl.(10) die stochastischen Koeffizienten $a(z,t)$ und $b(z,t)$ noch von der Zeit t abhängen, wird dies bei einer stationär betriebenen Anlage nicht der Fall sein. Da auch die Bedingungen für die Stoßvorgänge im ganzen Reaktionsraum gleich sind, können schließlich a und b als konstant angesehen werden. Gl.(10) geht damit über in

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial t} = -a \cdot \frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} \quad (11)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(z,t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß das betrachtete markierte Teilchen oder besser eine gewisse Menge (Bild 1) zu einem bestimmten Zeitpunkt t im Ortsbereich $(z; z+dz)$ ist.

Geht man vom Begriff der Wahrscheinlichkeit aus, /5/, so tritt an deren Stelle das Verhältnis N_a/N , wobei N die Anzahl der unternommenen Versuche und N_a die Anzahl der Versuche ist, bei denen ein Ereignis "a" eintrat. In diesem Sinne kann $p(z,t)$ in Gl.(10,11) auch physikalisch gedeutet werden: die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(z,t)$ hat die Bedeutung einer relativen Konzentration von vielen markierten Testteilchen in einem Medium.

Die stochastischen Koeffizienten in Gl.(10) können damit auch als physikalische Größen angesehen werden: $a(z,t)$ hat die Dimension einer Geschwindigkeit an der Stelle z zur Zeit t und wird als mittlere effektive Strömungsgeschwindigkeit interpretiert; $b(z,t)$ hat die Dimension eines Diffusionskoeffizienten und kennzeichnet die Turbulenz im Reaktor. Der Übergang zu der mit Hilfe der Bilanzgleichung gefundenen Gl.(3) ist mit

$$a(z,t) = v = \text{const.}$$

und

$$D = \frac{1}{2} b(z,t)$$

vollzogen.

I.1.C Herleitung der Anfangs- und Randbedingungen

Ausgehend von der physikalisch-chemischen Ausdeutung von Gl.(11) läßt sich die Anfangsbedingung für die untersuchte Aufstromkolonne sehr leicht formulieren: Sie besteht darin, daß zur Zeit $t=0$ die betrachtete bzw. markierte Teilchenmenge p_0 an der Stelle $z = z_0$ in den Reaktionsraum eintritt:

$$p(z,0) = p_0 \cdot \delta(z-z_0) \cdot \delta(t) .$$

Entsprechend einfach lassen sich die Randbedingungen angeben:

Die betrachtete Teilchenmenge kann - einmal injiziert - den Reaktor an der Stelle $z=0$ nicht mehr verlassen und nach Durchströmen des Bilanzraumes nicht mehr in diesen zurückkehren /2/.

Im einzelnen folgt formelmäßig für $z=0$:

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich die Teilchenmenge zum Zeitpunkt t im Reaktorgebiet $\{0 \leq z \leq z^*\}$ befindet, ist

$$P_{z^*} = \int_0^{z^*} p(z,t) dz .$$

Mit der zweiten KOLMOGOROVschen Gleichung (11) folgt die zeitliche Ableitung dieser Wahrscheinlichkeit P_{z^*}

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{z^*}}{\partial t} &= \int_0^{z^*} \left\{ -a \cdot \frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} \right\} dz \\ &= -a \cdot p(0,t) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\partial p(0,t)}{\partial z} + a \cdot p(z^*,t) - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\partial p(z^*,t)}{\partial z} . \end{aligned} \quad (12)$$

Man kann dieses Ergebnis wie folgt interpretieren: Gl.(12) besagt, daß sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die betrachtete Teilchenmenge im Reaktorraum $\{0 \leq z \leq z^*\}$ befindet, dadurch zeitlich ändert, daß sie dieses Gebiet über die Grenzen $z=0$ und $z=z^*$ verläßt $/2/$.

Da die Grenze $z=0$ aus physikalisch-chemischen Gründen nicht überschritten werden kann, folgt als Randwertbedingung für $z=0$

$$-a \cdot p(0,t) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\partial p(0,t)}{\partial z} = 0$$

bzw.

$$-v \cdot p(0,t) + D \cdot \frac{\partial p(0,t)}{\partial z} = 0 . \quad (13)$$

Entsprechend folgt aus Gl.(12) mit Gl.(13) für die Randbedingung an dem Ort $z=L$

$$\frac{\partial P_{z^*}}{\partial t} = a \cdot p(L,t) - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\partial p(L,t)}{\partial z} . \quad (14)$$

Da am Reaktorende ohne Rückvermischung sämtliche Substanz weggeführt wird - ist gleichzeitig

$$\frac{\partial P_{z^*}}{\partial t} = a \cdot p(L,t) . \quad (15)$$

Gl.(15) in Gl.(14) eingesetzt liefert damit, da $b \neq 0$, als Randbedingung für $z = L$

$$\frac{\partial p(L,t)}{\partial t} = 0 . \quad (16)$$

Es soll noch einmal erwähnt werden, daß Gl.(16) zum Ausdruck bringt, daß an der Stelle $z = L$ keine Rückvermischung in den Bilanzraum erfolgt. Tatsächlich dürfte jedoch in den realen Fällen eine gewisse Rückdiffusion auftreten /2/. Hierauf wird später noch einmal eingegangen werden.

I.1.D Formulierung der Systemgleichungen

Nach den Überlegungen in den Kapiteln A, B und C sollen nun die Ausgangsgleichungen ebenso wie die Anfangs- und Randbedingungen in der für die weiteren Überlegungen gültigen Nomenklatur angegeben werden:

Differentialgleichung :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial c}{\partial z} - D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \sigma ; \quad (17)$$

Anfangsbedingung :

$$c(z,0) = C_0 \cdot \delta(t) \cdot \delta(z-z_0) ; \quad (18)$$

Randbedingungen :

$$z=0 : c(0,t) - \frac{D}{v} \cdot \frac{\partial c(0,t)}{\partial z} = \sigma ; \quad (19)$$

$$z=L : \frac{\partial c(L,t)}{\partial z} = \sigma . \quad (20)$$

I.2 Meßaufbau, Testsignale, Versuche,

Beschreibung der Experimentierkolonne

Nachdem die Modellvorstellung für einen kontinuierlich durchströmten Reaktor entwickelt ist, sollen die für die experimentelle Untersuchung verwendeten Versuchsanlagen kurz beschrieben werden. Sämtliche Messungen konnten an bereits aufgebauten und mit entsprechenden Meßaufnehmern ausgestatteten Aufstromkolonnen des Instituts für Technische Chemie I der Universität Erlangen-Nürnberg durchgeführt werden. Darüberhinaus wurden auch die zum Betrieb der Anlagen nötigen Substanzen unentgeltlich zur Verfügung gestellt. Der Verfasser schuldet Herrn Prof. Dr. H. Hofmann



dafür ebenso Dank wie für die zahlreichen Anregungen und Hinweise, die bei der Durchführung der Untersuchungen von großem Nutzen waren. Bild 2 zeigt die Versuchsanlagen, die in /7/ und /8/ ausführlich beschrieben sind. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Daten ist in Bild 3 tabellarisch angefügt.

	Kolonne 1	Kolonne 2
Füllung	Kugeln	Raschigringe
Innerer Kolonnendurchmesser	30,5 cm	15 cm
Höhe der Schüttschicht	314,0 cm	322 cm
Abstand der Meßebenen vom Anströmboden		
unten $\approx$ 1	50,0 cm	31,0 cm
mitte $\approx$ 2	112,0 cm	167,0 cm
oben $\approx$ 3	212,0 cm	302,5 cm
Zahl der Meßzahlen pro Meßebene	4	3
Anströmboden	Lochplatte	Düsenplatte
Düsensdurchmesser	30 mm	0,2 mm
Füllkörper:		
Material	Maschinenglas	Acidur-Steinzeug
Abmessung	20 mm $\emptyset$	10 x 10 x 1,8 cm
spez. Gewicht	2,48 p/cm ³	2,31 p/cm ³
Schüttgewicht	145 kp/100 l	80 kp/100 l
spez. Oberfläche	177 m ² /m ³	382 m ² /m ³
Volumen der leeren Kolonne	229,4 l	59,09 l
Zwischenvolumen	92,3 l	39,36 l

Bild 3 : Technische Daten der Experimentierkolonnen

Wie aus der Meßordnung in Bild 2 ersichtlich, wird durch die Aufstromkolonne eine konstante Menge an entsalztem, destillierten Wasser geschickt. Dabei wird mit einem Rotameter der angebotene Wasserdurchfluß gemessen, während der Versuche kontrolliert und mit einem Reduktionsventil auf einem definierten, festen Wert gehalten. Nach einem gewissen Einschwingvorgang stellt sich dann in der Kolonne eine zeitlich konstante und über

den Kolonnenquerschnitt praktisch gleiche mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers ein. Zur Messung der Turbulenz und Untersuchung des Vermischungsverhältnisses - wofür die effektive Diffusionskonstante D ja ein Maß ist - wird die örtliche Vermischung durch Messung der Konzentration einer eingespritzten Indikatorflüssigkeit ermittelt. Hierfür wurde eine 0,1 n HCl-Lösung verwendet, die mit einem Druck von 1,5 atü von einem Doppelbehälter über ein elektrisch angesteuertes Magnetventil /9/ dem Einspritzstern der Kolonne zugeführt wurde. Bild 4 zeigt den Einspritzstern, der die Strömungsverhältnisse aufgrund seines Aufbaus nur unwesentlich beeinflusst.

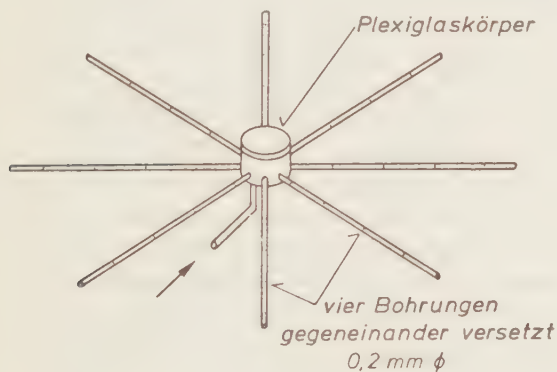


Bild 4 : Einspritzstern

Die Ansteuerung des Magnetventils erfolgte über einen Rauschgenerator, so daß statistisch veränderliche Mengen der schwachen Salzsäure in die Kolonne gelangten. Da zwischen der Ionenkonzentration und der elektrischen Leitfähigkeit einer Lösung ein fast linearer Zusammenhang besteht, solange nicht gewisse Grenzen /10/ überschritten werden, wurden die Konzentrationsschwankungen mit Hilfe von 4 bzw. 3 in einer Ebene angeordneten Leitfähigkeitsmeßstellen und angeschlossenen Trägerfrequenzmeßbrücken ermittelt. Damit die Meßzellen (Bild 5) die Strömungsverhältnisse möglichst wenig beeinflussen, sind sie den Füllkörpern nachgebildet /11/.

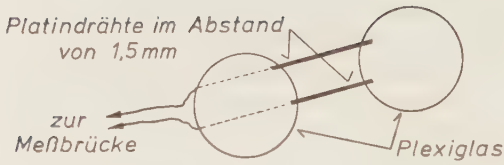


Bild 5 : Meßzellen

Erwähnt werden muß noch, daß beim Aufbau der Kolonnen die von Bischoff /12/ angegebenen Bedingungen dafür, daß der durch die Gl.(17) beschriebene Reaktor als unendlich lang betrachtet werden kann, berücksichtigt wurden. Die Entfernung zwischen den verschiedenen Meßorten und dem Kolonnensumpf bzw. -kopf wurde dabei so groß gemacht, daß die durch die Meßstellen markierte eigentliche Meßstrecke von Ein- und Auslauffeffekten möglichst wenig beeinflußt wird. Insgesamt sind jeweils drei Meßebenen angebracht, in denen eine Mittelung der örtlichen drei bzw. vier Leitfähigkeiten erfolgte. Für die Untersuchung der Zweiphasenströmung haben die Kolonnen Anströmböden (Düsenplatte), denen definierte Gasmengen (Prebluft) zugeführt werden können. Ähnlich wie bei der Flüssigphase wird Druck und Volumenstrom über ein genaues Dosierventil eingestellt und mit einem Rotameter gemessen.

1.2.A Einige Überlegungen zu den verschiedensten Testsignalen

Ausgehend von dem in Bild 2 gezeigten Aufbau der Versuchsanlage kann die Kolonne durch ein Schema nach Bild 6 beschrieben werden /9/.

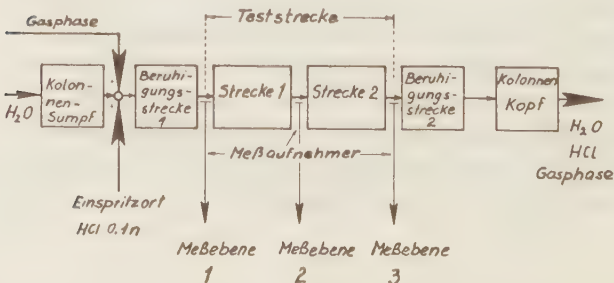


Bild 6 : Schematischer Aufbau der Experimentierkolonnen

Die Lösung von Gl.(17) bzw. die Ermittlung der für den Apparat kennzeichnenden Größe $D=D(v)$ soll nun durch Erregung der Aufstromkolonne mit einem geeigneten Testsignal erfolgen. Die für die Axialvermischung der Phasen charakteristische Größe $D(v)$ ist für die Dimensionierung solcher Kolonnen, d.h. für die Vorausberechnung ihres Verweilzeit-Verhaltens von großer Wichtigkeit.

Grundsätzlich stehen für die experimentellen Untersuchungen drei Signaltypen zur Verfügung:

1. nichtperiodische Testsignale
2. periodische Testsignale
3. stochastische Testsignale, die in den vorliegenden Untersuchungen verwendet wurden.

I.2.A.1 Nichtperiodische Testsignale

Von den Analyseverfahren im Zeitbereich haben impulsförmige und sprungförmige Erregungen eine weite Verbreitung gefunden, da hier lediglich aufgrund einer einzigen - entsprechend informationsreichen - Befragung des untersuchten Systems auf dessen dynamische Eigenschaften geschlossen werden kann. In /13/ und /14/ sowie zahlreichen weiteren Veröffentlichungen wird auf die Anwendung dieser Methoden in der Verfahrenstechnik ausführlich eingegangen. Die Grenzen der Anwendung sind dort zu sehen, wo die graphische bzw. digitale Auswertung des gemessenen Verlaufs der Systemantwort auf Schwierigkeiten stößt. Hierbei ist generell festzustellen, daß schon kleine Störungen, die stets in der Anlage vorliegen, relativ große Fehler bei der Berechnung des Übertragungsverhaltens ergeben. Um diesen Nachteil zu beseitigen, ist es nötig, auf relativ hohem Leistungspegel zu messen. Auf diese Weise sind dann i.a. ein günstigeres Signal-zu-Rausch-Verhältnis und damit geringere Verfälschungen gewährleistet. Hierbei wird aber leicht der lineare Arbeitsbereich der Aufnehmer (im untersuchten Fall die strenge Proportionalität zwischen elektrischer Leitfähigkeit einer Lösung und ihrer Ionenkonzentration) und auch der Strecke selbst (Änderung des Arbeitspunktes) verlassen. Häufig ist es deshalb nötig, optimale aperiodische Testsignale, mit denen man das dynamische Verhalten der gestörten Strecke bei begrenztem Leistungspegel des Testsignals mit einer geforderten

Genauigkeit ermitteln kann, zu bestimmen. Damit wird jedoch das Hauptargument für die Anwendung des Verfahrens, nämlich seine Einfachheit hinfällig.

I.2.A.2 Periodische Testsignale

Meß- und Auswerteverfahren mit periodischen - meist sinusförmigen - Testsignalen sind unter dem Begriff Frequenzganganalyse in die Literatur eingegangen. Die einfachste Auswertungsmethode ist die Bestimmung des Amplitudenverhältnisses und des Phasenverschiebungswinkels der gemessenen Ausgangs- und Eingangsschwingungen im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe der gleichzeitigen Aufzeichnung der Kurven auf einem geeigneten Schreiber /16/. Bei nur geringen Störungen läßt sich dann durch Variation der Frequenz der sinusförmigen Erregung der gewünschte Frequenzgang einfach rein optisch ermitteln. Automatische Verfahren, die ggf. auf dem Kompensationsprinzip beruhen, werden dabei sehr häufig verwandt. In manchen Fällen kann es auch von Vorteil sein, anstelle von Sinusschwingungen rechteckförmige oder trapezförmige periodische Signale zu verwenden.

Zwar liefert die Frequenzganganalyse relativ umfangreiche Information über das untersuchte System, doch ergeben sich neben der Tatsache, daß sie sehr zeitaufwendig ist, ähnlich wie bei den aperiodischen Signalen große Schwierigkeiten in der Auswertung, wenn die Meßsignale stark gestört sind.

I.2.A.3 Stochastische Testsignale

Das dynamische Verhalten von Systemen, auf die große Störsignale einwirken, kann mit Hilfe der Korrelationsverfahren wirkungsvoll ermittelt werden, /17/, /18/. Die Korrelationsverfahren, bei denen Testsignal und gestörtes Ausgangssignal miteinander verglichen werden, können dabei sehr einfach Nutz- und Störsignal voneinander trennen. Als Testsignale können künstlich erzeugte oder - falls dies möglich ist - die natürlichen, im Betrieb der Anlage selbst auftretenden stochastischen Signale verwendet werden. Letztere haben dabei den Vorteil, daß keine zusätzlichen, meist aufwendigen Signalgeneratoren benötigt werden.

Folgende Voraussetzungen müssen für die Verwendung natürlicher stochastischer Signale (d.h. natürliches Rauschen) als Testsignal gegeben sein, /19/ :

1. Stationarität des Rauschens;
2. Breitbandigkeit im Vergleich zum interessierenden Frequenzbereich des technischen Gebildes;
3. Das als Testsignal verwendete Rauschen darf nicht mit anderen vorhandenen Störsignalen korreliert sein.
4. Der Leistungspegel des Test-Stör-rauschens muß genügend groß im Vergleich zu anderen vorkommenden Störungen sein, da sonst ggf. sehr lange Meßzeiten erforderlich werden.

Besonders Punkt 4 läßt sich i.a. nur selten erfüllen, wie eigene Messungen an den untersuchten Aufstromkolonnen gezeigt haben. Im allgemeinen werden daher künstlich erzeugte Testsignale verwendet. Diese können dann deterministisch oder stochastisch sein. Bei einer Korrelationsanalyse mit deterministischen Signalen werden meist periodische i.a. sinusförmige Testfunktionen verwendet. Jede Messung wird mit einer bestimmten Frequenz des Testsignals durchgeführt und liefert damit nur jeweils einen Punkt des Frequenzganges. Da vor einer weiteren Messung mit einer geänderten Testsignalfrequenz erst das Abklingen des Einschwingvorganges abgewartet werden muß, eignet sich dieses Verfahren i.a. nicht zu einer automatischen Ermittlung des Frequenzganges, wie sie im vorliegenden Beitrag erstrebt wurde.

Es wurden deshalb künstlich erzeugte stochastische Testsignale auf die Aufstromkolonne gegeben. Dieses Testrauschen war, wie sich später zeigen wird, breitbandig im Vergleich zum interessierenden Frequenzbereich des chemischen Apparates. Besonders hervorgehoben werden muß noch die Tatsache, daß es durch die Anwendung von Korrelationsverfahren möglich war, auf wesentlich niedrigerem Leistungspegel als bei den Impulsverfahren zu messen, so daß die Gefahr der Aussteuerung des Systems über seinen linearen Arbeitsbereich hinaus praktisch nicht bestand. Wichtig war außerdem, daß im Gegensatz zu den in Echtzeit ablaufenden Impulsverfahren bei der Off-line-Auswertung ein in weiten Grenzen wählbarer Zeitmaßstab möglich war, so daß interessierende Zeit- und Frequenzbereiche entsprechend ausgewählt werden konnten.

Zum Abschluß dieser Überlegungen über die Erzeugung der Testsignale soll noch einmal daran erinnert werden, daß sich aufgrund der oben durch Wahrscheinlichkeitsgesetze beschriebenen inneren Vorgänge im Reaktorraum selbst die statistischen Analyseverfahren bei den experimentellen Untersuchungen geradezu anbieten.

I.2.B. Meßanordnung - Anmerkungen zu den statistischen Eigenschaften des Testsignals

Wie bereits erwähnt, wird zur Ermittlung des Verweilzeitverhaltens der Kolonne eine Indikatorflüssigkeit regellos schwankender Stärke (Konzentration) zu Beginn der Teststrecke in den Reaktor gegeben und der zeitliche Konzentrationsverlauf - der ein Maß für die Verweilzeit sein kann - an einigen ausgezeichneten Punkten der Teststrecke gemessen. Da es schwierig ist, regellos schwankende Salzsäure-Konzentration von bestimmter Struktur - diese ist, wie später ausgeführt wird, für die Beurteilung der Linearität der Anlage erforderlich - am Eingang der eigentlichen Teststrecke auf direktem Wege zu erzeugen, wird das stochastische Eingangssignal mit Hilfe der Beruhigungsstrecke 1 - Bild 6 - aufgebracht, /9/.

Hierbei macht man von der Tatsache Gebrauch, daß stochastische Signale beliebiger Amplitudenverteilung von linearen Systemen mit Tiefpaß-Charakter so verformt werden, daß ihre Verteilungsdichtefunktion in guter Näherung durch eine Gaußverteilung gekennzeichnet werden kann. Es läßt sich nämlich zeigen, daß z.B. der Ausgangsprozeß eines Tiefpasses erster Ordnung mit der Zeitkonstanten $a \cdot T$ ($a \gg 1$) Kovarianzfunktionen n -ter Ordnung hat, die mit $\left[\Omega^{\frac{n-2}{2}} \right]^{-1}$ abnehmen. Bei hinreichend großer Bandbegrenzung $a \gg 1$ sind daher die Kovarianzfunktionen höherer als zweiter Ordnung vernachlässigbar. Das heißt aber, daß die Verteilungsdichtefunktion des Ausgangsprozesses für $a \rightarrow \infty$ gegen die Gaußverteilung strebt, deren Merkmal es bekanntlich ist, daß nur die Kovarianzfunktionen erster und zweiter Ordnung existieren /20/. Angewandt auf die untersuchte Aufstromkolonne bedeutet dies, daß das Ausgangssignal der Beruhigungsstrecke 1 (Bild 6) als nahezu Gauß-verteiltes Eingangssignal für den folgenden Streckenabschnitt 1 betrachtet werden kann - praktisch unabhängig von der Amplitudenverteilung des eigentlichen künstlich erzeugten Testsignals - falls man diesen

ersten Kolonnenabschnitt hinreichend gut durch einen Tiefpaß charakterisieren kann.

Für die Anwendung der stochastischen Analyse linearer Systeme ist die Verteilungsdichtefunktion des Testsignals zunächst von untergeordneter Bedeutung, da der Zusammenhang zwischen Ausgangs- und Eingangsprozeß des linearen Systems - die Übertragungsfunktion - allein aufgrund der Kenntnis ihrer zweiten (Verbund) Momente ermittelt werden kann, /21/, /22/, /19/, /5/.

Für die Beurteilung des von der Modellvorstellung her geforderten linearen Verhaltens der Experimentierkolonne war es jedoch von Wichtigkeit, festzustellen, ob der auf indirektem Wege erzeugte Eingangsprozeß Momente höherer Ordnung besaß und falls ja, dann zu prüfen, wie sich diese beim Durchgang durch die Meßstrecke änderten. Es wurden daher umfangreiche Analyseprogramme zur Ermittlung der Verteilungsdichtefunktion bzw. der sie beschreibenden Momente entwickelt und die gemessenen Signalverläufe untersucht. Bereits in /9/ sind Ausgangsfolgen und mit Hilfe einer relativ einfachen Auswerteanordnung (verwendet wurde hierbei der Analogkorrelator ISAC der Firma Noratom, Leihgabe der DFG) gewonnene Verteilungsfunktionen $P(\xi_i)$ angegeben, die zeigen, daß einmal die Nutzsignale von erheblichen Störsignalen überlagert sind und daß zum anderen die Verteilungsfunktion in recht guter Näherung als normalverteilt $(0, \sigma)$ bezeichnet werden kann. In den Bildern 7 bis 9 sind tabellarisch die Momente der Verteilungsdichtefunktionen sowie die Abweichungen von der Normalverteilung angegeben, /23/.

Es zeigt sich, daß mit zunehmender Entfernung vom Ort des Einspritzens der Indikatorflüssigkeit die Annäherung an die geforderte Normalverteilung der Signale besser wird. Gleichzeitig erkennt man, daß signifikante Unterschiede zwischen den einzelnen Signalverläufen hauptsächlich anhand der Momente der Verteilungsdichtefunktionen festzustellen sind, während die Verläufe der Verteilungen selbst weniger deutliche Abweichungen von der idealen Gaußverteilung aufweisen. Charakteristisch erscheint, daß von Meßstelle 1 nach Meßstelle 3 die spürbare Schiefe der Verteilung abnimmt. Unter Berücksichtigung der Störsignale und eventuell vorliegender Meßfehler sind die vorliegenden Ergebnisse als sehr gut zu bezeichnen.

Verteilungsdichtefunktion				Momente d. Verteilungsdichtefunktion			
Stützstelle	Meßebene			Ordnung	Meßebene		
x	1	2	3	n	1	2	3
-1.0	.0317	.0295	.0337	1	$5.27 \cdot 10^{-3}$	$-2.54 \cdot 10^{-3}$	$-6.87 \cdot 10^{-4}$
-.9	.0394	.0306	.0348	2	$9.99 \cdot 10^{-2}$	$9.99 \cdot 10^{-2}$	$9.99 \cdot 10^{-2}$
-.8	.0678	.1147	.1251	3	$-1.95 \cdot 10^{-2}$	$-1.69 \cdot 10^{-2}$	$-1.12 \cdot 10^{-2}$
-.7	.1127	.1661	.1533	4	$3.73 \cdot 10^{-2}$	$3.39 \cdot 10^{-2}$	$3.06 \cdot 10^{-2}$
-.6	.2309	.1868	.2381	5	$-2.19 \cdot 10^{-2}$	$-1.61 \cdot 10^{-2}$	$-9.93 \cdot 10^{-3}$
-.5	.3249	.2109	.2914	6	$2.78 \cdot 10^{-2}$	$2.03 \cdot 10^{-2}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$
-.4	.4683	.5004	.3078	7	$-2.51 \cdot 10^{-2}$	$-1.49 \cdot 10^{-2}$	$-7.98 \cdot 10^{-3}$
-.3	.5898	.7353	.8025	8	$2.91 \cdot 10^{-2}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$9.35 \cdot 10^{-3}$
-.2	.8108	.9418	1.0439	9	$-3.06 \cdot 10^{-2}$	$-1.44 \cdot 10^{-2}$	$-6.56 \cdot 10^{-3}$
-.1	1.1467	1.0914	1.1527	10	$3.50 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$	$6.88 \cdot 10^{-3}$
0.	1.2572	1.4028	1.3451	11	$-3.89 \cdot 10^{-2}$	$-1.46 \cdot 10^{-2}$	$-5.61 \cdot 10^{-3}$
.1	1.5286	1.2062	1.1657	12	$4.47 \cdot 10^{-2}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$5.63 \cdot 10^{-3}$
.2	1.1205	1.2258	1.0450	13	$-5.09 \cdot 10^{-2}$	$-1.53 \cdot 10^{-2}$	$-4.99 \cdot 10^{-3}$
.3	1.0570	.9363	1.0135	14	$5.88 \cdot 10^{-2}$	$1.59 \cdot 10^{-2}$	$4.93 \cdot 10^{-3}$
.4	.6204	.5386	.5002				
.5	.3841	.4873	.4349				
.6	.1707	.1388	.2077				
.7	.0284	.0481	.1044				
.8	.0098	.0087	.0000				
.9	.0000	.0000	.0000				
1.0	.0000	.0000	.0000				

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(it)^v}{v!} \mu_v dt$$

$$\mu_n = \mathcal{E}\{(\mu-m)^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu-m)^n \cdot p(\mu) d\mu \quad n = 1, 2, 3$$

$$\mu_0 = m$$

Bild 7 : Tabellen der Verteilungsdichtefunktion und Momente für die verschiedenen Meßebenen

Für eine genaue Beurteilung der Linearität des Übertragungsverhaltens der Kolonne reichen die bisherigen Untersuchungen natürlich noch nicht aus; aufgrund der Ergebnisse der Momentenmessung erscheint die Annahme jedoch gerechtfertigt, daß Signalerzeugung, Meßaufnehmer und -Transmitter

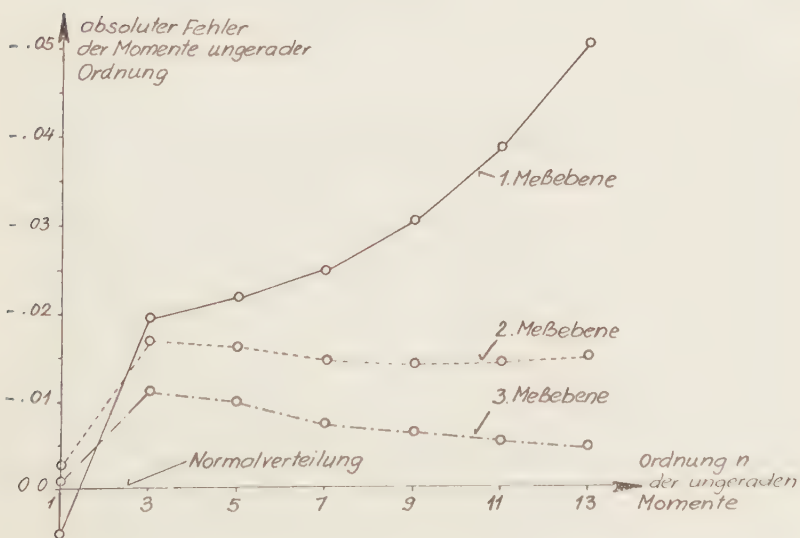
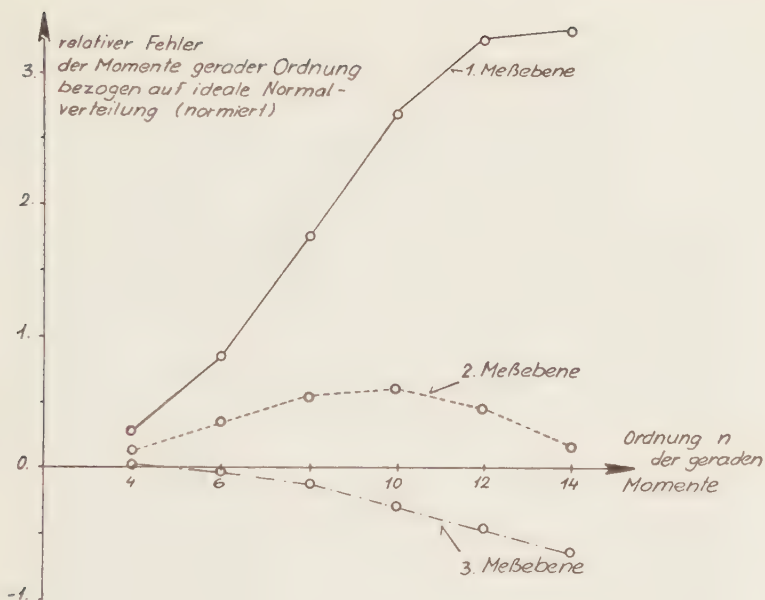


Bild 8 : Fehler der berechneten Momente

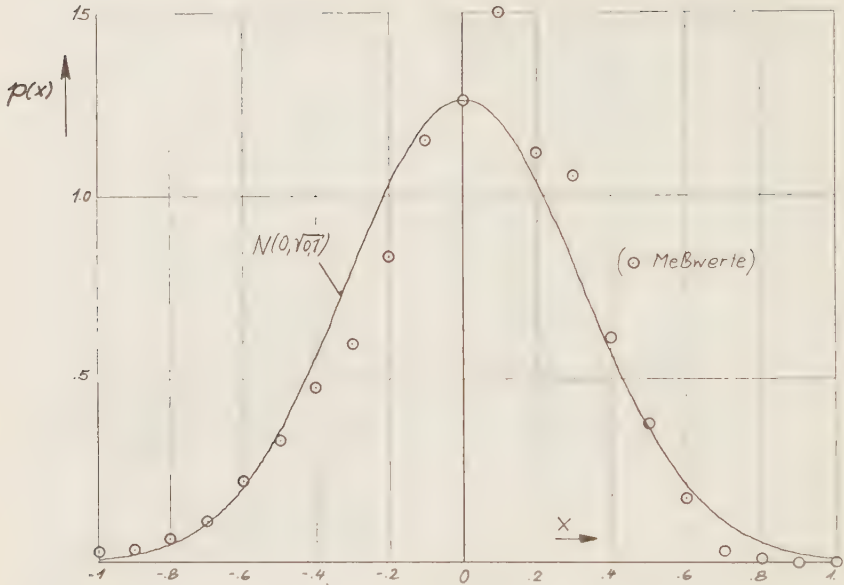


Bild 9a : Verteilungsdichtefunktion $p(x)$ normiert
Messebene 1 (Eingangssignal)

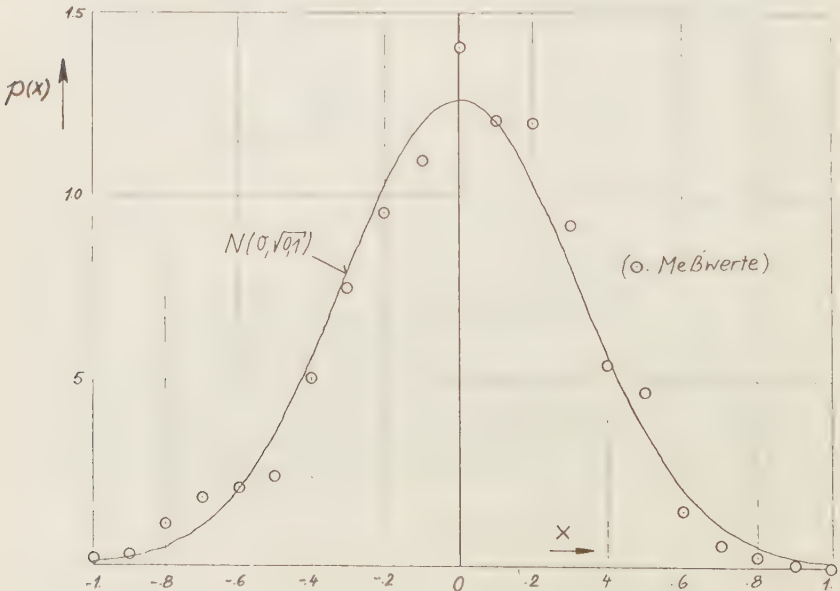


Bild 9b : Verteilungsdichtefunktion $p(x)$
Messebene 2

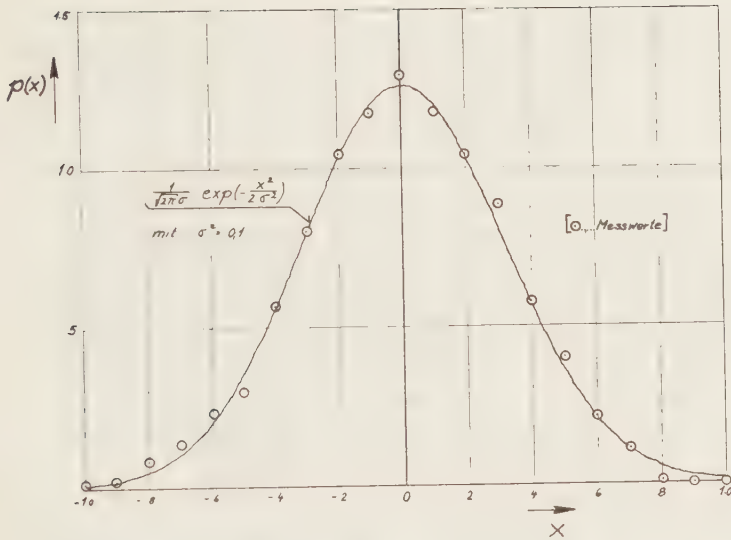


Bild 9c : Verteilungsdichtefunktion $p(x)$
Messebene 3 (Ausgangssignal)

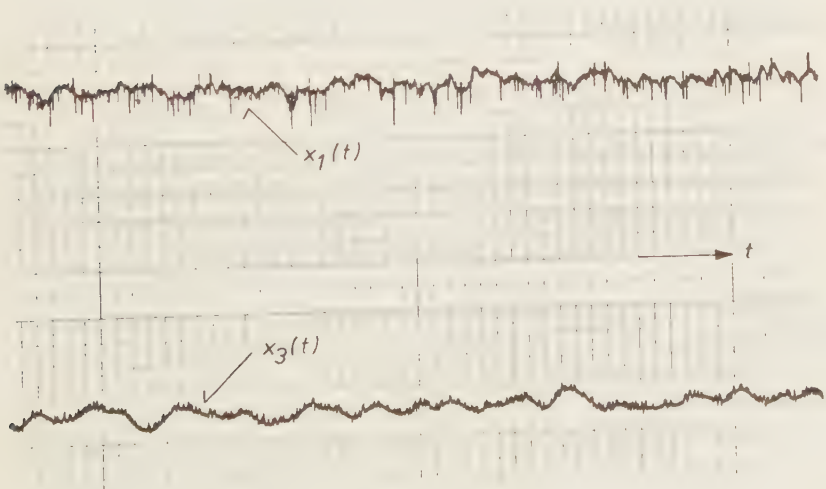


Bild 9d: Gemessene stark gestörte Konzentrationsverläufe der Meßebenen 1 und 3

zumindestens jedoch keinen störenden Einfluß auf die als linear angenommenen Kolonnen ausüben.

Für eine indirekte Erzeugung des Testsignals sprechen zwei weitere für die Meßanordnung sehr wichtige Fakten:

1. Bei einem direkten Vergleich zwischen dem eigentlichen Testsignal, also dem Rauschgeneratorausgang und der Systemantwort, muß die Übertragungsfunktion der Meßwertwandler bekannt sein. Das würde im vorliegenden Fall die Kenntnis des dynamischen Verhaltens von Einspritzstern sowie Meßzellen einschließlich Trägerfrequenzmeßbrücken erfordern. Wird dagegen auf dem beschriebenen Weg das Testsignal indirekt eingebracht, so fallen die Übertragungseigenschaften der Transmitter dann aus den Berechnungen heraus, wenn diese nur gleichartig und genügend breitbandig im Vergleich zum Frequenzbereich der Signale sind. Dies ist aber aufgrund des Aufbaus gewährleistet.
2. Nachdem nach den obigen Darlegungen die Form der statistischen Testsignale von nur geringer Bedeutung ist, kann für die experimentellen Untersuchungen ein einfach zu realisierendes Testsignal verwendet werden:

Es wurde ein Magnetventil in die Indikatorflüssigkeits-(0,1n HCl)-Zuführung angeordnet, das von einem binären Rauschsignal geschaltet wird /9/.

I.2.C Meßtechnische Modifikation der Signalerzeugung

Während der experimentellen Untersuchungen stellte sich bald heraus, daß selbst bei stark verdünnter Indikatorflüssigkeit (0,01n HCl) die Meßbereiche der Trägerfrequenzmeßbrücken sowie der angeschlossenen Magnetbandeinheit überschritten wurden /9/. Dies hat seine Erklärung darin, daß bei einem natürlichen binären Rauschprozeß ggf. sehr lange die logischen Pegel "0" oder "1" vorliegen, d.h.: das Magnetventil ist über einen längeren Zeitraum geschlossen oder offen. Die Folge davon ist, daß der nur schmale Linearitätsbereich der Meßbrücken verlassen wird, was ggf. zu beträchtlichen Meßfehlern führt. Da jedoch - wie gezeigt wurde - die statistischen Eigenschaften des eigentlichen Testsignals von untergeordneter Bedeutung sind, wurde in einer kleinen Zusatzelektronik die Maximal-

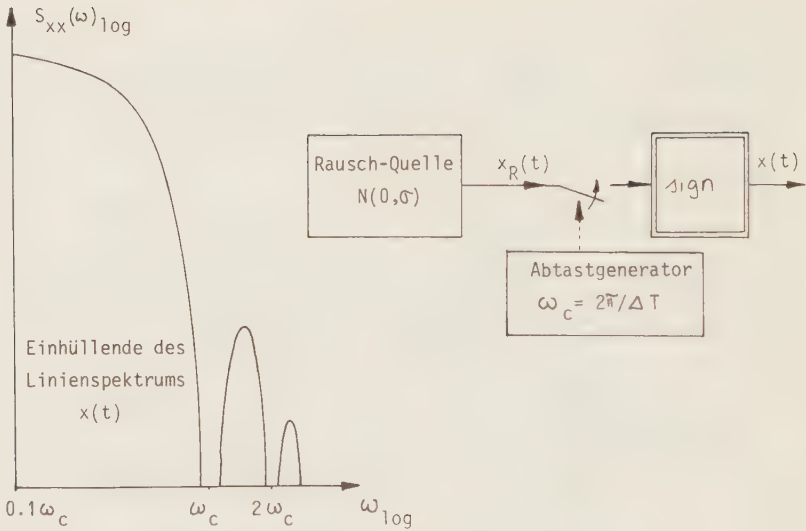


Bild 11 : Prinzip der Signalerzeugung; Leistungsdichtespektrum

gängen von $x_R(t)$ im Intervall $(t, t+\tau)$ liegt, führt auf das Erfülltsein der Ungleichung $x_R(t+\tau) \cdot x_R(t) < 0$, /25/. Somit folgt

$$P_{ung}(\tau) = \Pr \{ x_R(t+\tau) \cdot x_R(t) < 0 \}.$$

Bezeichnet man mit $\phi_{xx}(\tau)$ die AKF von $x_R(t)$, so läßt sich ableiten

$$P_{ung}(\tau) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\phi_{xx}(0)}.$$

Entsprechend läßt sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der Schaltzeitpunkte in $(t, t+\tau)$ gerade ist, angeben zu

$$P_{ger}(\tau) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\phi_{xx}(0)}.$$

I.2.D Versuchsdurchführung

Da die Auswertung der gemessenen Signale nicht am Versuchsort gemacht

werden konnte, mußte ein frequenzmoduliertes hochstabiles Magnetbandgerät als Zwischenspeicher verwendet werden. Dieser (scheinbare) Nachteil wurde dadurch beseitigt, daß durch einfache Geschwindigkeitstransformationen die Auswertung der Meßreihen auf $\frac{1}{32}$ der ursprünglichen Meßzeit reduziert werden konnte, indem die Bandgeschwindigkeit von $1\frac{7}{8}$ ips (Aufnahme) auf 60 ips (Wiedergabe) erhöht wurde (Frequenztransformation). Hierdurch schrumpften die langen Meßzeiten von bis zu 3 Stunden auf Auswertezeiten von etwa 5 Minuten.

Den ausführlich aufgezeigten Vorteilen der stochastischen Systemanalyse steht ein Nachteil gegenüber, der sich besonders bei Laboruntersuchungen bemerkbar macht: Es wird eine relativ lange Meßzeit benötigt /26/.

Bei eingefahrenen industriellen Anlagen ist dies i.a. nicht nachteilig, falls die Stationarität des Prozesses gewährleistet ist; ggf. muß bei Regeleingriffen eine Kompensation dieses Einflusses vorgenommen werden. Da wegen der relativ kleinen Wasseraufbereitungsanlage nur durchschnittlich 3000 l destilliertes Wasser zur Verfügung standen, konnten nur relativ geringe Strömungsgeschwindigkeiten zwischen 600 l/h und 1000 l/h - entsprechend 0,61 cm/s und 1,51 cm/s - gewählt werden. Eine Auflistung der Versuche ist dem Kapitel I.6 zu entnehmen.

I.3 Möglichkeiten der Berechnung des Verhaltens eines Diffusionsreaktors

I.3.A Geschlossene Lösung der Diffusionsgleichung

Ausgehend vom prinzipiellen Aufbau der Aufstromkolonne, Bild 6, kann der untersuchte Reaktor durch das in Bild 12 gezeigte Schema beschrieben werden, /14/. Die aufgrund des Aufbaus als unendlich lang anzusehende Reaktionsstrecke ist dabei in Anlehnung an /14/ in die drei Teilbereiche

$$\begin{array}{ll} (-\infty \leq z \leq 0) & ,D_a \\ (0 \leq z \leq L) & ,D \quad \text{.....eigentlicher Meßbereich} \\ (L \leq z \leq +\infty) & ,D_b \end{array}$$

unterteilt, die zur allgemeinen Betrachtung bereichsweise verschiedene Diffusionskonstanten D_a , D , D_b besitzen. Entsprechend Gl.(11) bzw. Gl.(3) gelten drei partielle Differentialgleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(z,t)$ bzw. die Konzentration $c(z,t)$, die über die Randbedingungen

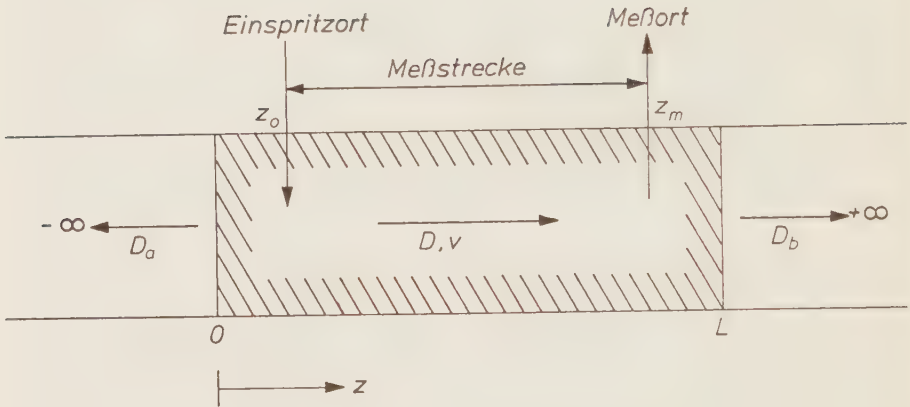


Bild 12 : Reaktorschema zur Herleitung der theoretischen Lösung

Gl.(13) und (16) bzw. (19) und (20) verkoppelt sind. Nimmt man für die Lösung dieser Aufgabe die Darstellung des Reaktorverhaltens durch die Konzentration, so folgen die Gleichungen (21a) bis (21c):

$$-\infty \leq z \leq 0 \quad \frac{\partial c_a}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial c_a}{\partial z} - D_a \cdot \frac{\partial^2 c_a}{\partial z^2} = \sigma \quad (21a)$$

$$0 \leq z \leq L \quad \frac{\partial c}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial c}{\partial z} - D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = C_0 \cdot \delta(t) \cdot \delta(z-z_0) \quad (21b)$$

$$L \leq z \leq +\infty \quad \frac{\partial c_b}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial c_b}{\partial z} - D_b \cdot \frac{\partial^2 c_b}{\partial z^2} = \sigma \quad (21c)$$

Mit $C_0 \cdot \delta(t) \cdot \delta(z-z_0)$ ist eine impulsförmige Signalanregung an der Stelle $z = z_0$ beschrieben, welche äquivalent einem im Vergleich zur Systemzeitkonstanten breitbandigen Rauschsignal ist.

Die Rand- und Übergangsbedingungen für $z = 0$ und $z = L$ führen zu den Gleichungen (22a) bis (22d), /9/:

$$c_a(0^-) - \frac{D_a}{v} \cdot \frac{\partial c_a(0^-)}{\partial z} = c(0^+) - \frac{D}{v} \cdot \frac{\partial c(0^+)}{\partial z}, \quad (22a)$$

$$c(L^-) - \frac{D}{v} \cdot \frac{\partial c(L^-)}{\partial z} = c_b(L^+) - \frac{D_b}{v} \cdot \frac{\partial c_b(L^+)}{\partial z}, \quad (22b)$$

$$c_a(0^-) = c(0^+), \quad (22c)$$

$$c(L^-) = c_b(L^+). \quad (22d)$$

Da für die beiden "Enden" des unendlich lang gedachten Reaktors die Konzentrationen endlich bleiben müssen, /14/, folgen die beiden noch fehlenden Randbedingungen zu

$$c_a(-\infty) = \text{endlich}, \quad (22e)$$

$$c_b(+\infty) = \text{endlich}. \quad (22f)$$

Die Anfangsbedingung ist (bis auf den Einspritzort $z = z_0$)

$$c_a = c = c_b = 0 \quad \text{für } t = 0.$$

Damit stehen 6 Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der 6 unbekannten Integrationskonstanten in den Gl.(21a) bis (21c) zur Verfügung.

Nach Einführung der Normierungsbeziehungen, Gl.n.(23a) bis (23d),

$$x = \frac{z}{L}, \quad (23a)$$

$$T = \frac{L}{v}, \quad (23b)$$

$$\vartheta = \frac{t}{T} = \frac{vt}{L}, \quad (23c)$$

$$B_0 = \frac{vL}{D} \quad (\text{Bodensteinzahl}), \quad (23d)$$

und nach Anwendung der Laplace Transformation bezüglich der normierten Zeit ϑ ergeben sich die Gl.n.(24a) bis (24c):

$$s \cdot C_a(s) + C_a'(s) - \frac{1}{B_{0a}} \cdot C_a''(s) = 0, \quad (24a)$$

$$s \cdot C(s) + C'(s) - \frac{1}{B_0} \cdot C''(s) = C_0 \cdot T \cdot \delta(x-x_0), \quad (24b)$$

$$s \cdot C_b(s) + C_b'(s) - \frac{1}{B_{0b}} \cdot C_b''(s) = 0. \quad (24c)$$

Hierbei ist s die dimensionslose Variable der Laplace Transformation;
 $(\dots)'$ bedeutet Differentiation nach der normierten Ortsvariablen
 $x = \frac{z}{L}$; die in den Bildbereich transformierten Konzentrationen sind durch
 große Buchstaben C gekennzeichnet.

Diese normierten Differentialgleichungen in x , Gl. (24a) bis (24c), ergeben für die drei Teilbereiche des Reaktionsraumes die folgenden Lösungen:

$$x \leq 0 : C_a(x,s) = A_a \cdot e^{\lambda_{a1}x} + B_a \cdot e^{\lambda_{a2}x}; \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 : C(x,s) = & -C_0 \cdot T \cdot B_0 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 x_0}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot 1(x-x_0) \cdot e^{\lambda_1 x} \\ & + C_0 \cdot T \cdot B_0 \cdot \frac{e^{-\lambda_2 x_0}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot 1(x-x_0) \cdot e^{\lambda_2 x} + A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot e^{\lambda_2 x} \end{aligned} \quad (25b)$$

$$x \geq 1 : C_b(x,s) = A_b \cdot e^{\lambda_{b1}x} + B_b \cdot e^{\lambda_{b2}x}. \quad (25c)$$

Hierbei haben die Exponenten $\lambda_{a1/2}$, $\lambda_{1/2}$ und $\lambda_{b1/2}$ die Form

$$\lambda_{1/2} = B_0 \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{B_0}} \right).$$

Sie werden aus den Lösungen der homogenen Gleichungen bei den gegebenen Anfangsbedingungen ermittelt. Die Lösung (25b) für die inhomogene Gleichung (24b) erhält man dabei mit Hilfe der "Methode der Variation der Konstanten";/33/.

Die Integrationskonstanten A_a , B_a , A , B sowie A_b und B_b ergeben sich durch Einarbeiten der sechs Randbedingungen in die Lösungen für die drei Teilbereiche. Für den interessierenden Meßbereich $0 \leq x \leq 1$ ergeben sich A und B zu :

$$A = \frac{C_0 T B_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{(\lambda_2 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) [(\lambda_1 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0) e^{\lambda_1(1-x_0)} - (\lambda_2 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0) e^{\lambda_2(1-x_0)}]}{(\lambda_1 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0)(\lambda_2 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) e^{\lambda_1} - (\lambda_2 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0)(\lambda_1 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) e^{\lambda_2}} ,$$

$$B = \frac{-C_0 T B_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{(\lambda_1 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) [(\lambda_1 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0) e^{\lambda_1(1-x_0)} - (\lambda_2 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0) e^{\lambda_2(1-x_0)}]}{(\lambda_1 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0)(\lambda_2 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) e^{\lambda_1} - (\lambda_2 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0)(\lambda_1 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) e^{\lambda_2}} .$$

Damit ergibt sich die vollständige Lösung im Testbereich $0 \leq x \leq 1$ zu

$$C(x, s) = - \frac{C_0 T B_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot 1(x-x_0) [e^{\lambda_1(x-x_0)} - e^{\lambda_2(x-x_0)}] + \frac{C_0 T B_0}{\lambda_1 - \lambda_2} . \quad (26)$$

$$\frac{[(\lambda_2 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) e^{\lambda_1 x} - (\lambda_1 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) e^{\lambda_2 x}] [(\lambda_1 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0) e^{\lambda_1(1-x_0)} - (\lambda_2 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0) e^{\lambda_2(1-x_0)}]}{(\lambda_1 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0)(\lambda_2 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) e^{\lambda_1} - (\lambda_2 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0)(\lambda_1 B_{0a} - \lambda_{a1} B_0) e^{\lambda_2}} .$$

Zur Diskussion dieses Ergebnisses sollen zwei Spezialfälle betrachtet werden:

1. Der Reaktionsraum ist unendlich lang und homogen, d.h. $D_a = D = D_b$.

Damit sind die konstruktiven Gegebenheiten des Meßaufbaus berücksichtigt.

2. Im Bereich $L \leq x \leq \infty$ findet keine Diffusion statt, d.h. $D_b = 0$. Damit wird die für die statistischen Überlegungen - die zu der wichtigen Verweilzeitverteilung führen - geltende Randbedingung nach Gl.(20) realisiert. Weiterhin sei $D_a = D$.

An diesen beiden Spezialfällen wird deutlich, daß sich gesuchte Verweilzeitverteilung und gemessener Konzentrationsverlauf nur dann entsprechen, wenn Pkt. 2 erfüllt werden kann. Dies ist i.a. jedoch nicht möglich, so daß aus dem Konzentrationsverlauf nur bedingt auf die Verweilzeitverteilung geschlossen werden kann, /2/. Bei der in der Literatur /14/ und /27/ bis /31/

angewandten Momentenmethode zur Ermittlung des einzigen unbekannten Parameters der Ausgangsdifferentialgleichungen - der Bodensteinzahl B_0 - wird auf diese Schwierigkeiten eingegangen und - z.B. in /2/ und /30/ - angegeben, wie man aus dem meßtechnisch erfassbaren Konzentrationsverlauf unter den Bedingungen des Pkts. 1 auf die die Verweilzeitverteilung kennzeichnende Bodensteinzahl B_0 schließen kann. Im vorliegenden Beitrag, wo regelungstechnische Gesichtspunkte im Vordergrund stehen, soll darauf nicht näher eingegangen werden.

I.3.A.1 Zweiseitig unendlich langer Reaktor; $D_a=D=D_b$

Für die Eigenwerte gilt dann

$$\lambda_1 = \lambda_{a1} = \lambda_{b1} \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_{a2} = \lambda_{b2} ;$$

weiterhin ist $B_0 = B_{0a} = B_{0b}$, so daß man schließlich mit $x_0=0$ erhält

$$C(x,s) = C_0 \cdot T \cdot \frac{\exp\{B_0 x (\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{B_0}})\}}{2 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{B_0}}} \quad (27)$$

Die Lösung im Zeitbereich folgt damit zu

$$c(x,\psi) = C_0 \cdot T \cdot \sqrt{\frac{B_0}{4\pi\psi}} \cdot e^{\frac{B_0 x}{2}} \cdot e^{-\frac{B_0}{4}(\frac{x^2}{\psi} + \psi)} \quad (28)$$

Die Bilder 13 bis 15 zeigen für feste Werte B_0 und x einige berechnete Lösungen der Gln.(27) und (28). Die mit Hilfe einer Simulation des Reaktors auf dem Hybridrechner EAI 690 gewonnenen Zeitverläufe zeigt Bild 16, /32/. Die vom Konzept her analog orientierte Simulationsanordnung wurde dabei durch einen digitalen Speicher ergänzt, so daß für die diskretisierte Ortskoordinate eine zufriedenstellende Genauigkeit erreicht wurde. Ein Teilortsbereich bestand hierbei aus je 16 Stützstellen - d.h. wurde durch eine entsprechende Zahl von Analog-Integrierern beschrieben -. Die Abbildung zeigt eine Kurvenschar $c(x,\psi)$ für alle Werte x , die Zeit ψ ist Parameter.

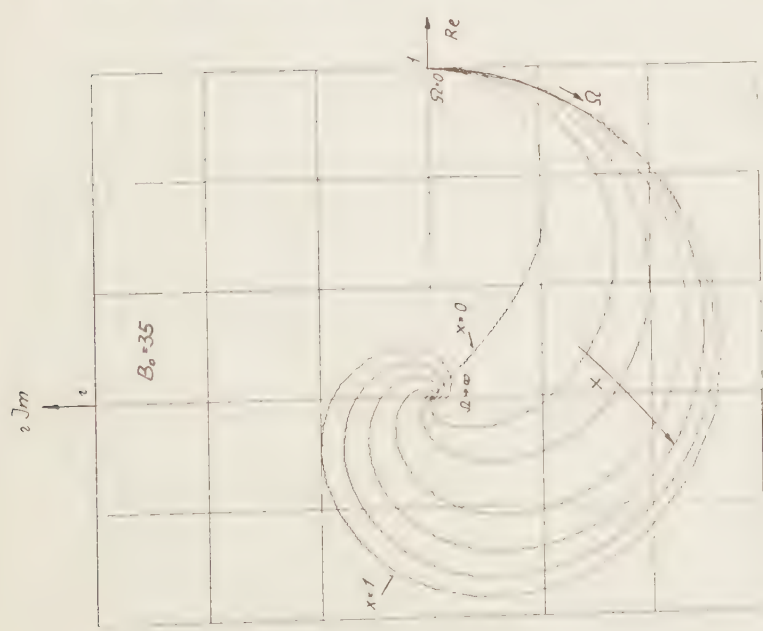


Bild 13a : zweiseitig unendlicher Reaktor $C(x, B_0, \Omega)$

$$\Omega = \omega T$$

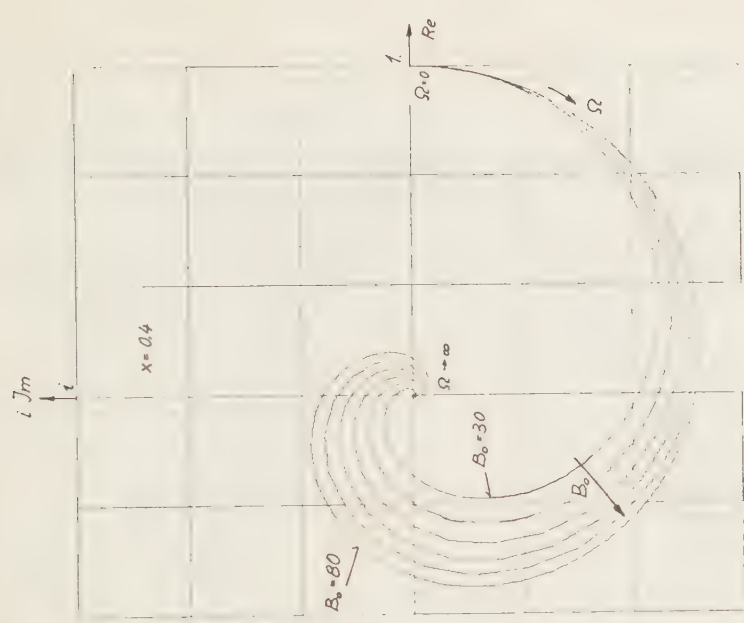


Bild 13b : zweiseitig unendlicher Reaktor $C(x, B_0, \Omega)$

$$\Omega = \omega T$$

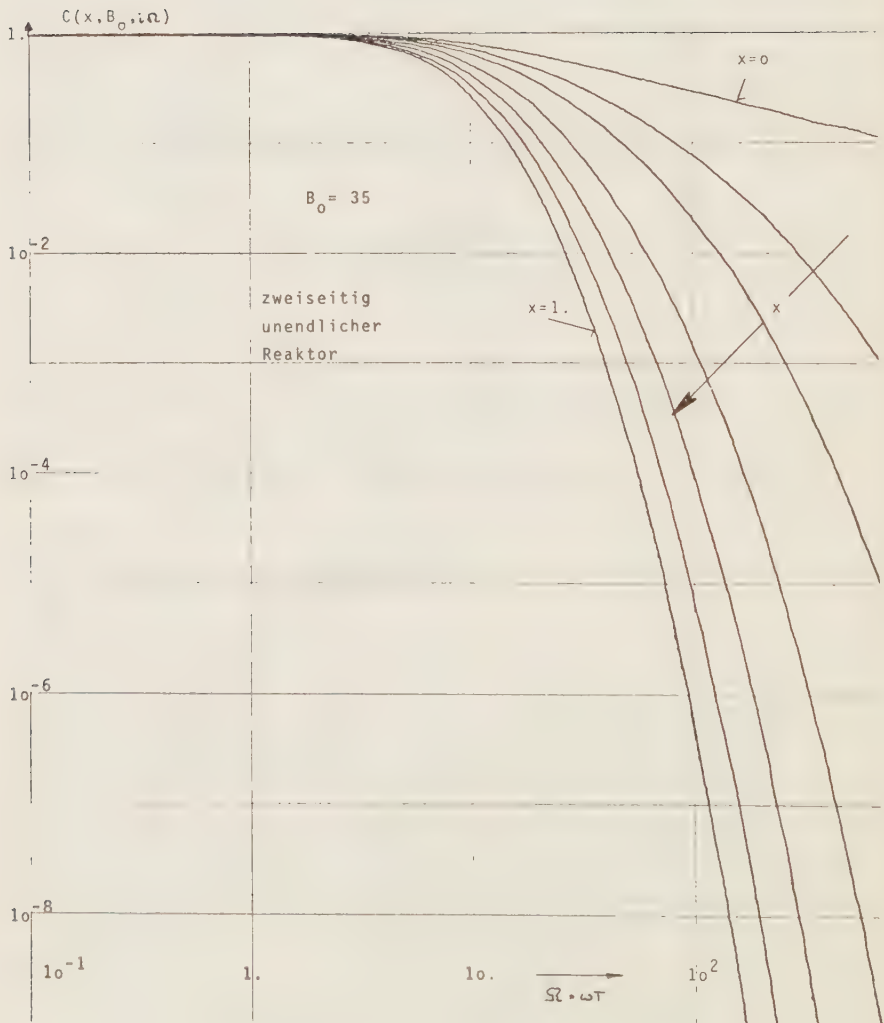


Bild 14a : Betrag des Frequenzgangs $C(x, B_0, i\Omega)$ Variation von $x, B_0=35$

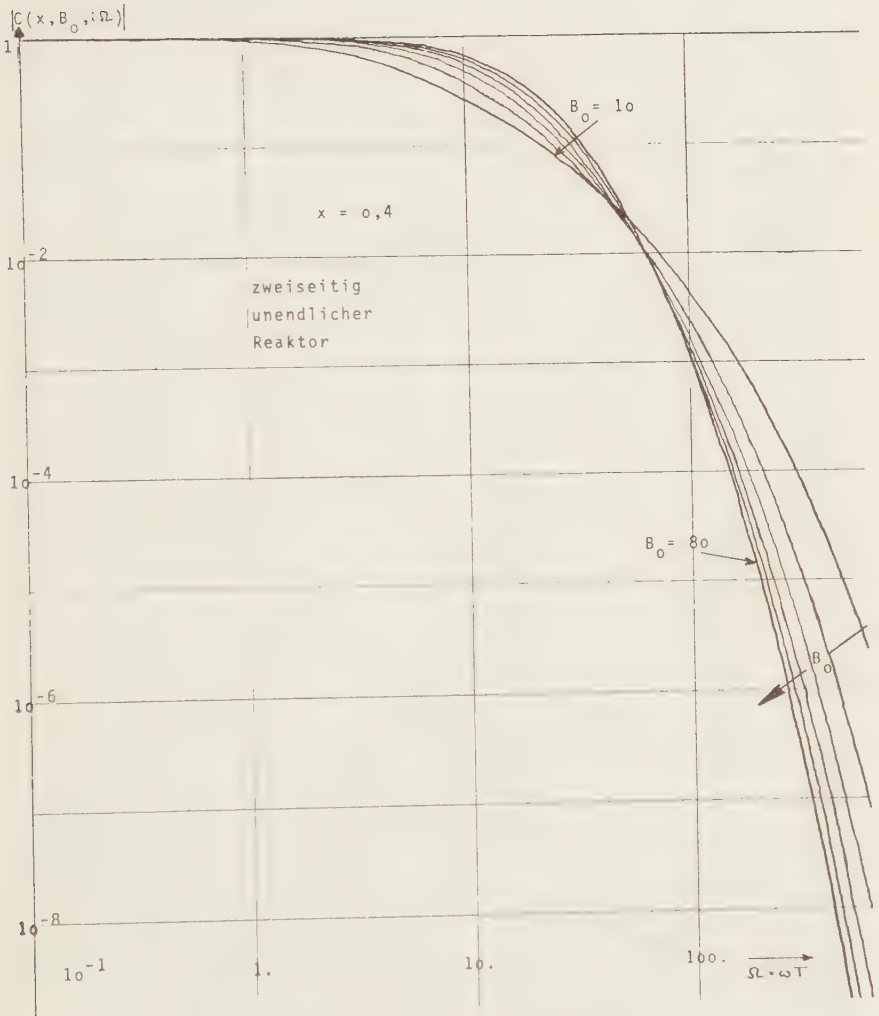


Bild 14b : Betrag des Frequenzgangs $C(x, B_0, i\Omega)$ Variation von $B_0, x=0,4$

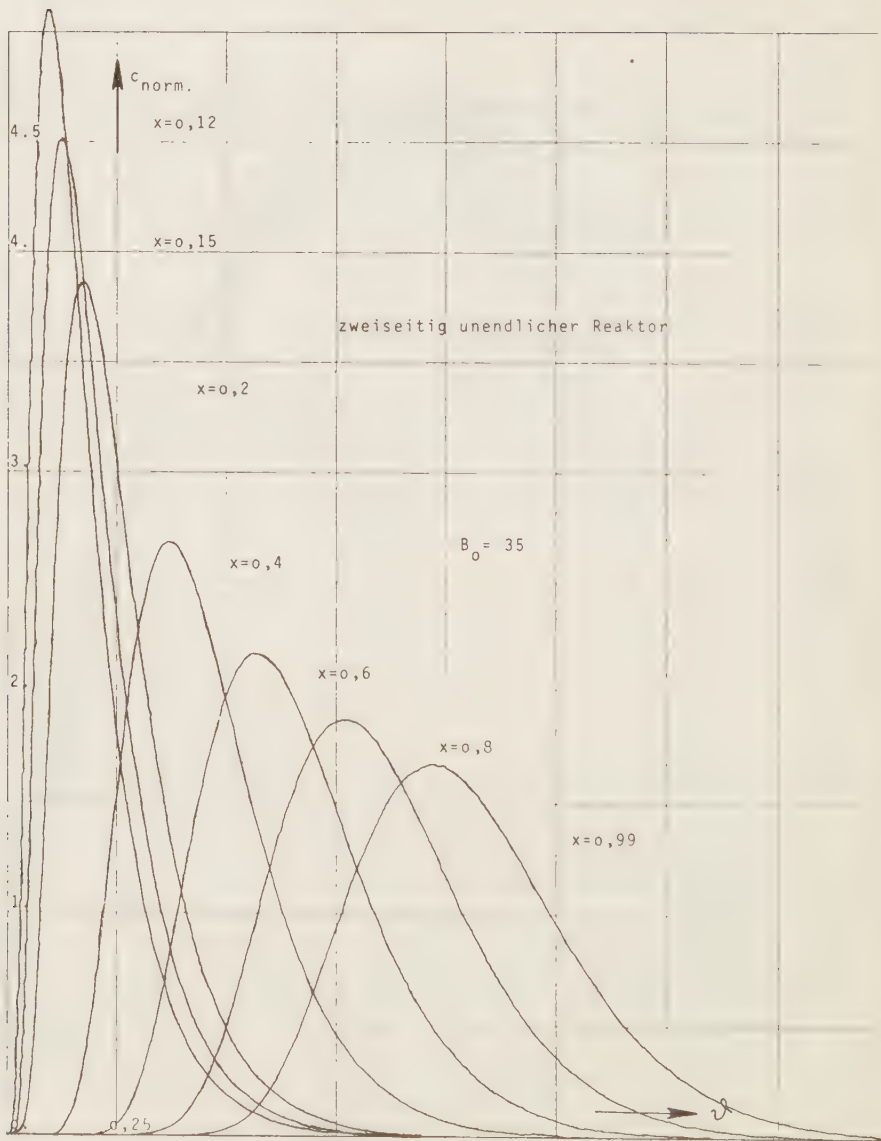


Bild 15 : Gewichtsfunktion $c_{\text{norm.}}(x, B_0, \nu)$

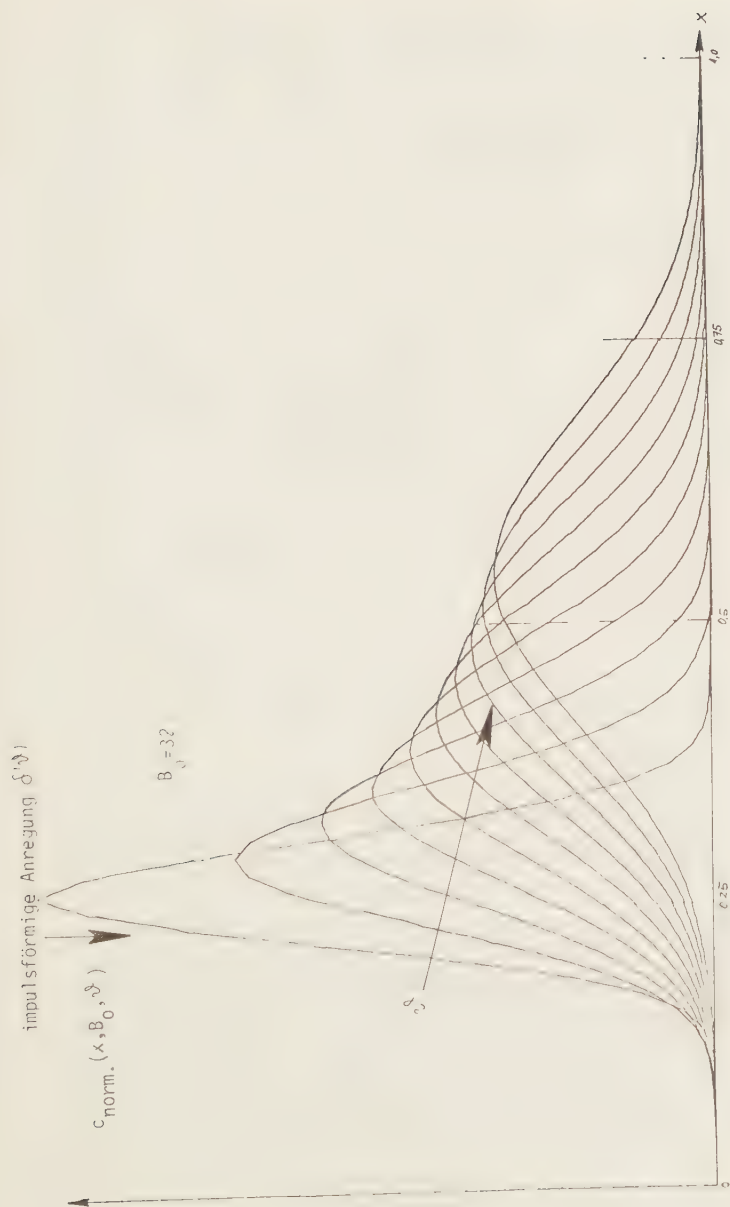


Bild 16: Gewichtsfunktionen des zweiseitig unendlichen Reaktors
 Analogsimulation mit digitalem Speicher : 4 Teil-Ortsbereiche mit je 18 Integriern
 (DSCT)

I.3.A.2 Einseitig unendlich langer Reaktor; $D_b = 0$, $D_a = D$

Mit $\lambda_1 = \lambda_{a1}$, $\lambda_2 = \lambda_{a2}$ sowie $B_{0a} = B_0$ folgt zunächst

$$C(x,s) = \frac{C_0 T B_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ e^{\lambda_2 x} - \frac{\lambda_2 B_{0b} - \lambda_{b2} B_0}{\lambda_1 B_{0b} - \lambda_2 B_0} \cdot e^{\lambda_1(x-1) + \lambda_2} \right\}$$

Läßt man nun noch $D_b \rightarrow 0$ gehen, so ergibt sich

$$C(x,s) = \frac{C_0 T B_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ e^{\lambda_2 x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{\lambda_1(x-1) + \lambda_2} \right\}$$

bzw. ausführlich:

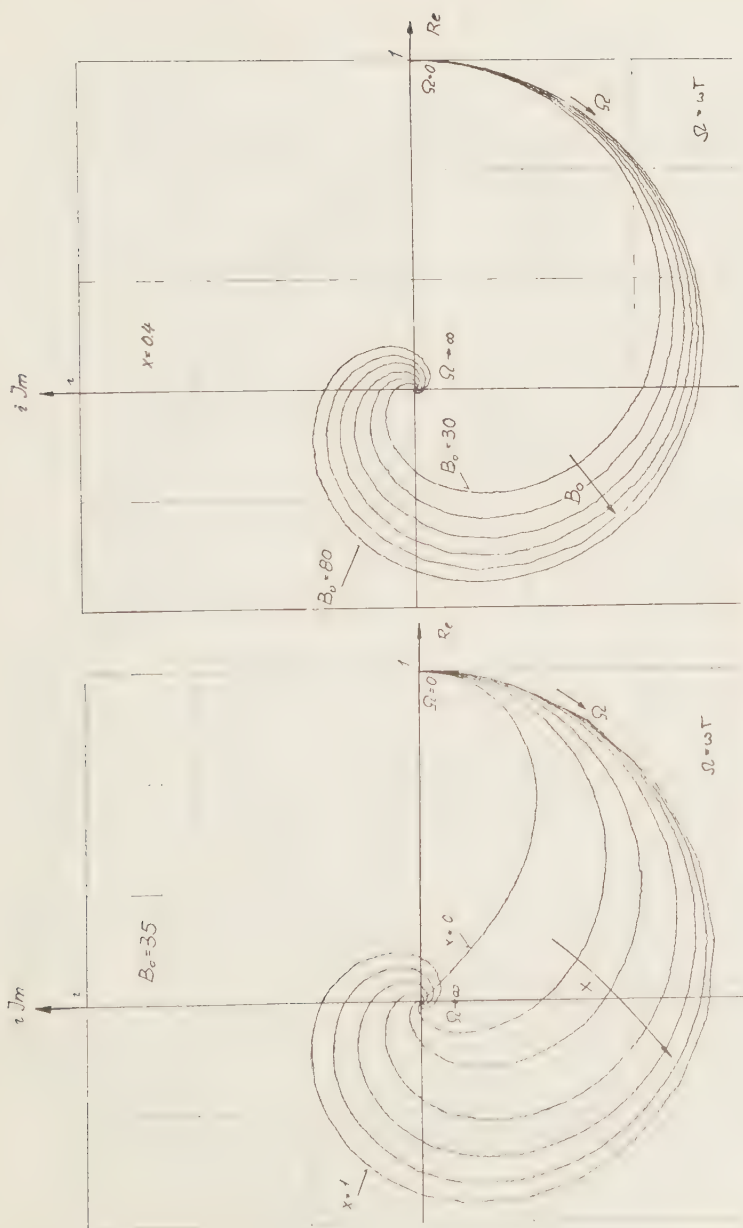
$$C(x,s) = \frac{C_0 T \sqrt{B_0}}{2 \sqrt{\frac{B_0}{4} + s}} \cdot e^{\frac{B_0 x}{2}} \left\{ e^{-x \sqrt{B_0} \sqrt{\frac{B_0}{4} + s}} - \frac{\sqrt{B_0} - 2 \sqrt{\frac{B_0}{4} + s}}{\sqrt{B_0} + 2 \sqrt{\frac{B_0}{4} + s}} \cdot e^{(x-2) \sqrt{B_0} \sqrt{\frac{B_0}{4} + s}} \right\} \quad (29)$$

Im Zeitbereich ermittelt man daraus:

$$c(x,y) = C_0 T \sqrt{\frac{B_0}{4 \pi y}} \cdot e^{\frac{B_0 x}{2}} e^{-\frac{B_0}{4} \left(\frac{x^2}{y} + y \right)} \left[1 + e^{-\frac{B_0(1-x)}{y}} \right] - \frac{C_0 T B_0}{2} e^{B_0} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\sqrt{B_0}}{2} \left(\sqrt{y} - \frac{x-2}{\sqrt{y}} \right) \right\} \quad (30)$$

Die Bilder 17, 18, 19 zeigen berechnete Lösungen von Gl. (29) und (30).

Signifikante Unterschiede zu den Darstellungen in Bild 13 sind nicht festzustellen. Beispielsweise zeigen sich im Verlauf von $c(x, B_0, y)$, Bild 19, erst ab $x = 0,8$ - bei $B_0 = 35$ - Abweichungen vom Kurvenverlauf für den zweiseitig unendlichen Reaktor. Eine Erhöhung von B_0 , d.h. die Strömung wird relativ zur Diffusion vergrößert, läßt die meßbaren Unterschiede noch geringer werden. Physikalisch gesprochen bedeutet dies, daß der Abschluß der Teilstrecke der Aufstromkolonne nur einen sehr geringen Einfluß auf die Verhältnisse im Innern der Kolonne hat. Um dies an einem Extremfall zu demonstrieren, wurde bei der Hybridsimulation (CSDT)



linkseitig unendlicher Reaktor

Bild 17a : Ortskurve $C(x, B_0, i\Omega)$ $B_0 = 35$

Bild 17b : Ortskurve $C(x, B_0, i\Omega)$ $x = 0,4$

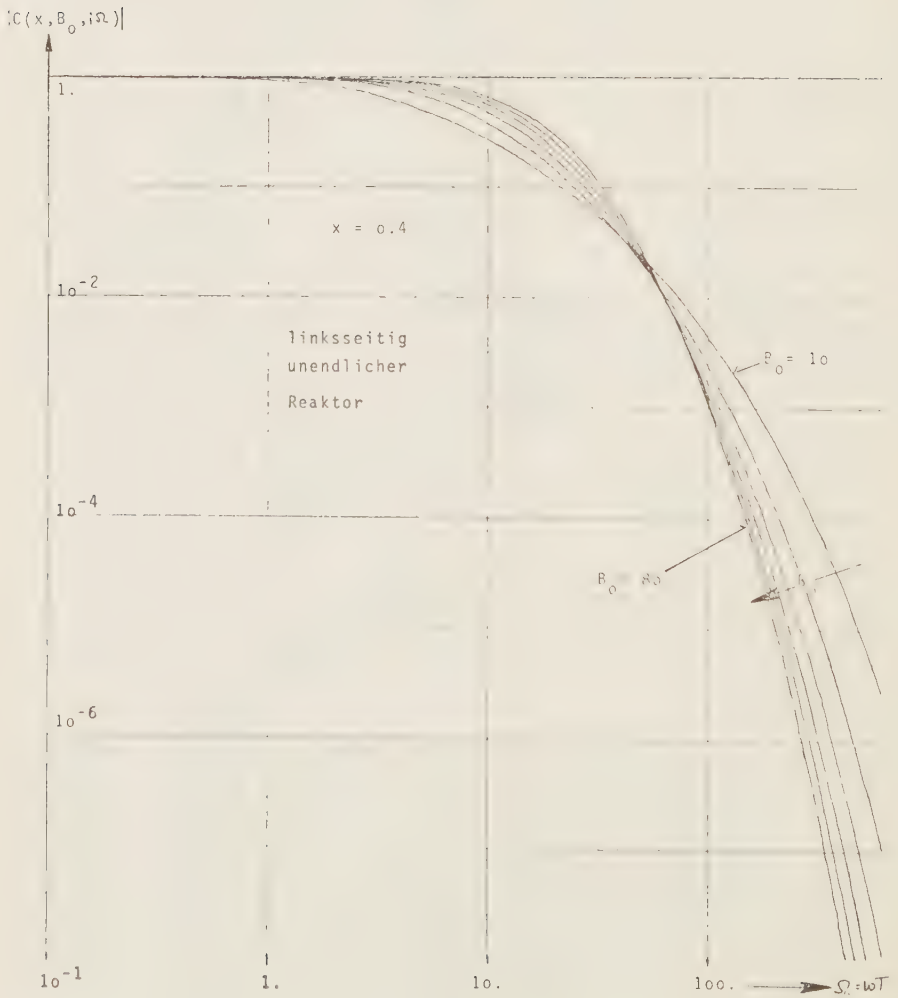


Bild 18a : Betrag des Frequenzgangs: Variation von B_0 , $x = 0,4$

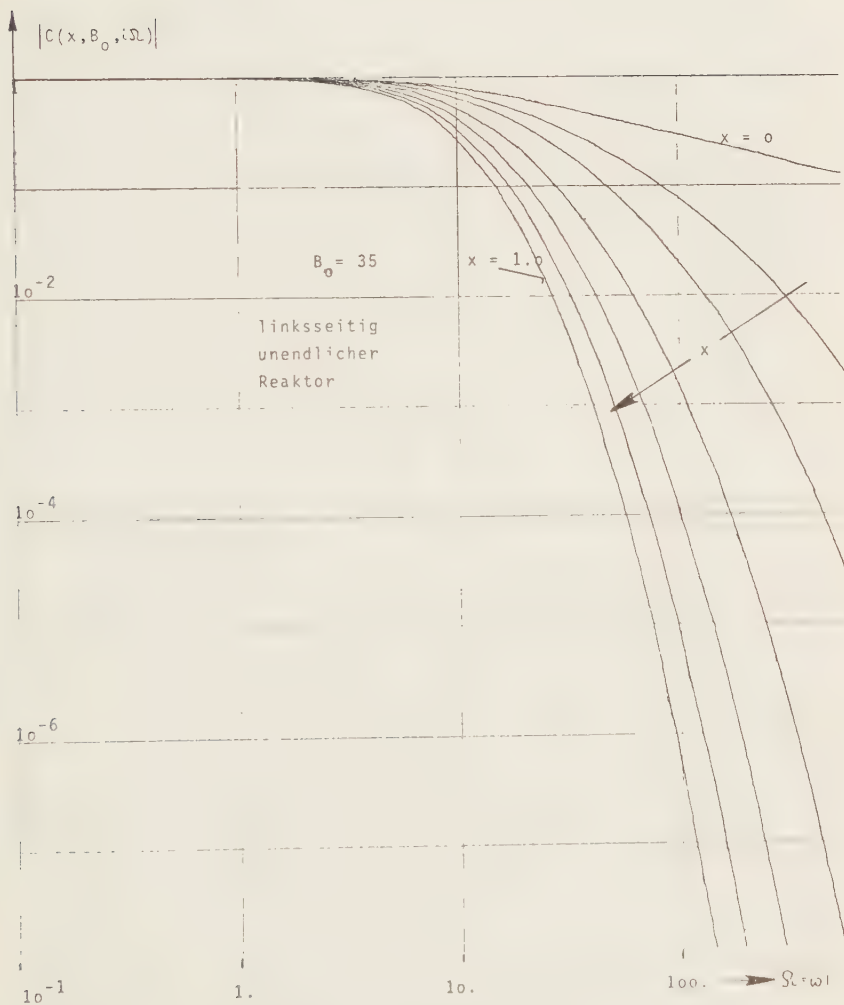


Bild 18b : Betrag des Frequenzgangs: Variation von x , $B_0 = 35$

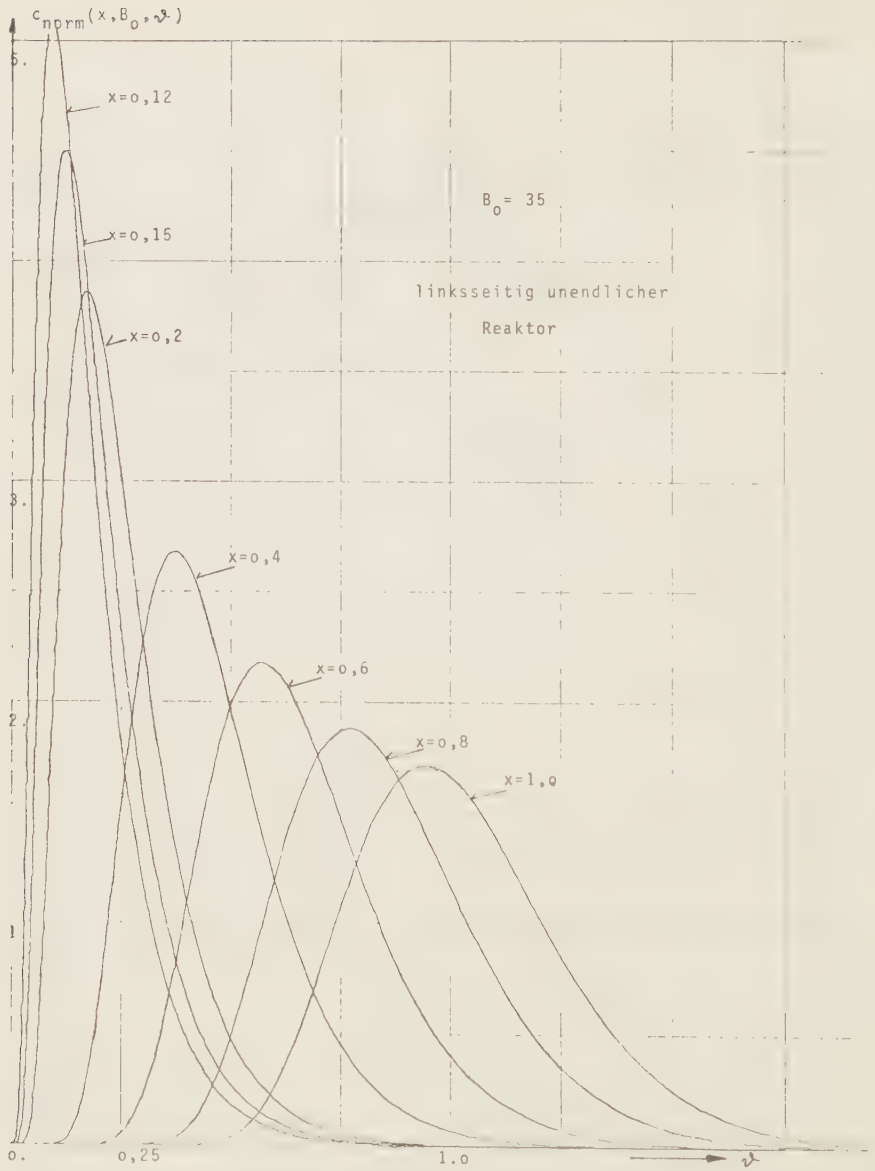


Bild 19 : Gewichtsfunktionen $c(x, B_0, \tau)$: Variation von x , $B_0 = 35$

die Randbedingung des Reaktors für $x = 1$, also Kolonnenende, dahingehend geändert, daß $c(x = 1, B_0, \vartheta) \equiv 0$ für alle ϑ war. Als Anregung wurde zum Zeitpunkt $\vartheta = 0$ an der Stelle $x = 0$ eine Sprungfunktion $1(\vartheta)$ aufgebracht. Bild 20 zeigt die Lösungskurven $c(x, B_0, \vartheta)$ über den gesamten Feldbereich $\{x\}$, Parameter ist ϑ . Man sieht, daß sich für $\vartheta \rightarrow \infty$ ein Konzentrationsprofil einstellt, das bis auf den unmittelbaren Nachbarbereich des Reaktorendes homogen und konst. = 1 ist. Mit zunehmendem B_0 verschiebt sich die Grenzkurve $\vartheta \rightarrow \infty$ noch mehr in Richtung Reaktorende. Die Vorgänge in der Kolonne selbst werden damit praktisch unbeeinflusst von der Feldgrenze bei $x = 1$ sein. Umgekehrt läßt sich für den Bau einer Experimentierkolonne damit schließen, daß eine Beruhigungsstrecke von etwa (20-30%) der eigentlichen Teilstrecke völlig ausreicht, um - bei den üblichen Parametern B_0 , etc. - die Kolonne mathematisch-physikalisch als unendlich lang zu betrachten. Für die untersuchten Kolonnen waren diese Voraussetzungen, wie der Tabelle Bild 3 zu entnehmen ist, erfüllt.

1.3.B Einige Anmerkungen zur Simulation des Reaktorverhaltens auf einem Hybridrechner

Die Lösung von Problemen, die durch partielle Differentialgleichungen beschreibbar sind, ist sowohl mit Hilfe von Analog- als auch von Digitalrechnern möglich,/34/. Analoge Methoden sind dadurch kompliziert, daß solche Probleme zwei oder mehrere unabhängige Variable haben, während der Analogrechner auf eine Variable beschränkt ist (Zeit). Darüberhinaus sind derartige Probleme i.a. als Randwertprobleme formuliert, während der Analogrechner besonders für Anfangswertprobleme geeignet ist. Digitalrechenprozeduren verlangen iterative Berechnung und führen damit bei vernünftiger Genauigkeit häufig zu nichtvertretbarem Zeitaufwand. Insgesamt vier prinzipielle Lösungsansätze lassen sich angeben,/35/ :

1. CONTINUOUS-SPACE-CONTINUOUS-TIME (CSCT)

Es werden sämtliche unabhängigen Variablen kontinuierlich dargestellt. Dies kann z.B. durch Simulation der Feldgleichung durch ohm'sche und kapazitive Leitungsbeläge erreicht werden. Da hierbei hohe Anforderungen an Aufzeichnung und Verarbeitung der Signale gestellt werden müssen, hat diese Methode nur noch prinzipielle Bedeutung.

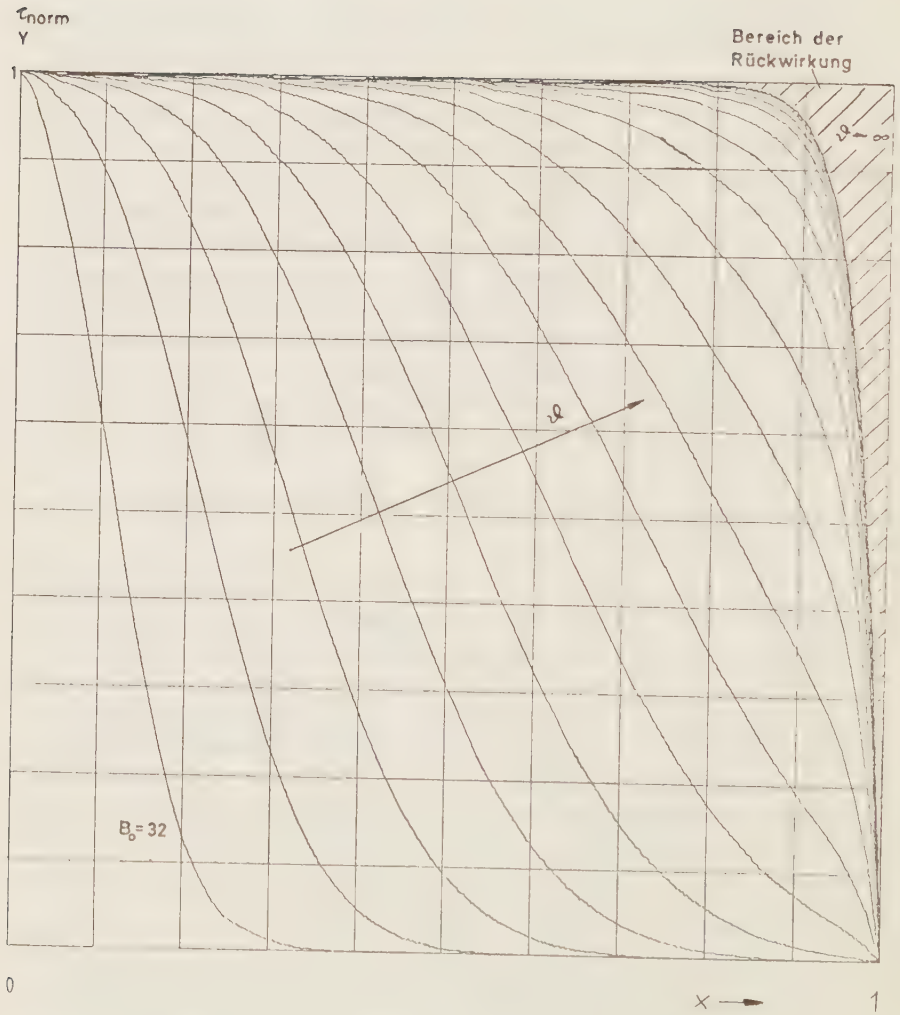


Bild 20 : Übergangsprofil eines Reaktors mit $c(x=1, \beta_0, \beta) = 0$

2. DISCRETE-SPACE-CONTINUOUS-TIME (DSCT)

Durch teilweise Algebraisierung der Ausgangsgleichungen lassen sich rein analoge, aber auch hybride Lösungswege angeben. Es ergeben sich häufig gewisse Schwierigkeiten bei der Simulation der geforderten Randbedingungen, so daß dann auf geeignete Approximationen zurückgegriffen werden muß.

3. CONTINUOUS-SPACE-DISCRETE-TIME (CSDT)

Diese Methode erfordert ein kontinuierliches Speicherwerk, was i.a. nur hybrid simuliert werden kann. Außerdem ist die Stabilität des Algorithmus nicht immer gewährleistet. Von der Struktur her ist die CSDT-Methode für die Lösung von Randwertproblemen am besten geeignet, da die Randbedingung i.a. einfach als Anfangs/Endbedingung simuliert werden können. Eine hybride Lösung wurde auf dem System EAI 690 realisiert.

4. DISCRETE-SPACE-DISCRETE-TIME (DSDT)

Durch vollständige Algebraisierung der Ausgangsgleichung ist dieser Lösungsweg auf dem Digitalrechner möglich.

Der übliche Ansatz der Analogsimulation von Feldproblemen benützt die Approximation aller Ableitungen bezüglich des Ortes durch endliche Differenzen-Ausdrücke. Aus

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial z} - D \frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2} = R(z, t)$$

folgt mit

$$\frac{\partial \kappa}{\partial z} \approx \frac{\kappa|_{z+\Delta z} - \kappa|_{z-\Delta z}}{2\Delta z}, \quad \frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2} \approx \frac{\kappa|_{z+\Delta z} + \kappa|_{z-\Delta z} - 2\kappa|_z}{(\Delta z)^2}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{v}{2\Delta z} [\kappa|_{z+\Delta z} - \kappa|_{z-\Delta z}] - \frac{D}{(\Delta z)^2} [\kappa|_{z+\Delta z} + \kappa|_{z-\Delta z} - 2\kappa|_z] = R(z, t).$$

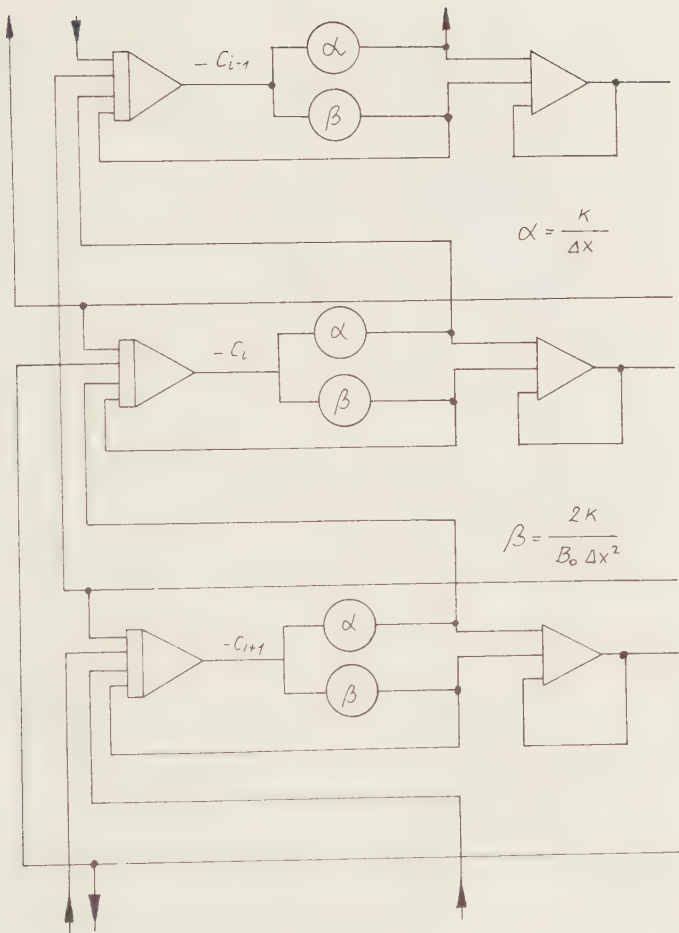
Mit den Normierungen $x = \frac{z}{L}$, $\vartheta = \frac{v \cdot t}{L}$, $B_0 = \frac{vL}{D}$, $K = \frac{TV}{L}$ und diskreter Schreibweise folgt

$$\frac{d\kappa_i}{d\vartheta} + \frac{K}{\Delta x} \cdot \frac{\kappa_{i+1} - \kappa_{i-1}}{2} - \frac{2K}{B_0 (\Delta x)^2} \cdot \frac{\kappa_{i+1} + \kappa_{i-1} - 2\kappa_i}{2} = r(x, \vartheta),$$

$i \in (1, n)$

Ein Schaltungselement - d.h. einen Feldstützpunkt - zeigt Bild 21. In Bild 22 ist das Prinzip der gesamten Analogschaltung dargestellt.

Die Anfangsbedingung jedes Integrierers entspricht dem jeweiligen Wert des Raumpunktes für $t=0$. Auf dem Analogrechner EAI 680 konnten insgesamt 24 Stützstellen der Ortskoordinate x simuliert werden. Eine Interpolationsschaltung ermöglichte die kontinuierliche Betrachtung des gesamten Feldbereichs. Die Randbedingungen konnten dabei aus dem oben erwähnten Grund z.T. nur näherungsweise realisiert werden. Die Analogsimulation ist sehr schnell und stabil, hat jedoch dort ihre Grenzen, wo größere Feldbereiche simuliert werden müssen: dann sind die aufgrund der begrenzten Integriererzahl nur wenige Stützstellen der Ortskoordinate x nicht ausreichend. Eine hybride Lösung ermöglicht die mehrfache Benutzung der analogen Schaltungen und damit durch richtiges Aneinanderfügen der berechneten Teilbereiche die Simulation von beliebig weiten Feldern - bei der geforderten Auflösung -. Der Digitalrechner hat hierbei zunächst die Aufgabe, die analogen Zwischenergebnisse für die Teil-Felder zu speichern und sie als 'Randbedingungen' für den darauffolgenden Abschnitt geeignet an den Analogrechner zurückzugeben. Im Gegensatz zur Simulation eines Gesamtfeldes sind nun aber die 'Randbedingungen' für die Teilfelder nicht bekannt, da sie ja selbst Teil der gesuchten Lösung sind. Es ist daher erforderlich, die 'Zwischen'-Randbedingungen zu schätzen und in mehrfachen Integrationsläufen so lange die Feldsimulation vorzunehmen, bis die aufgrund der Schätzungen an den Feldgrenzen sich ergebenden Funktionswerte mit den geforderten Randbedingungen des Gesamtfeldes genügend gut übereinstimmen. Die Steuerung dieses Ablaufes sowie die Schätzung neuer 'Zwischen'-Randbedingungen nimmt dabei ein digitales Kontrollprogramm vor. Begnügt man sich mit geringerer Genauigkeit, so kann man durch größere Teilfelder die 'Randbedingungen' approximieren; hierbei wird dann an einer von den aktuellen Feldrändern genügend weit entfernten (und damit von diesen näherungsweise unbeeinflusst) Stützstelle das Übergangsprofil ermittelt und als 'richtige' linke Randfunktion für die darauffolgende Bereichssimulation betrachtet, /32/. Untersuchungen zeigten dabei, daß selbst bei nur wenigen zusätzlichen Stützstellen das Profil innerhalb der größeren Teilfelder relativ unempfindlich gegenüber den aktuellen willkürlichen Randbedingungen ist, /32/.



$$\frac{dc_i}{dt} + \frac{K}{\Delta x} \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2} - \frac{2K}{B_0 \Delta x^2} \frac{C_{i+1} + C_{i-1} - 2C_i}{2} = r(x, t)$$

Bild 21 : Schaltungselement der reinen Analogsimulation der algebraisierten Diffusionsgleichung - DSCT

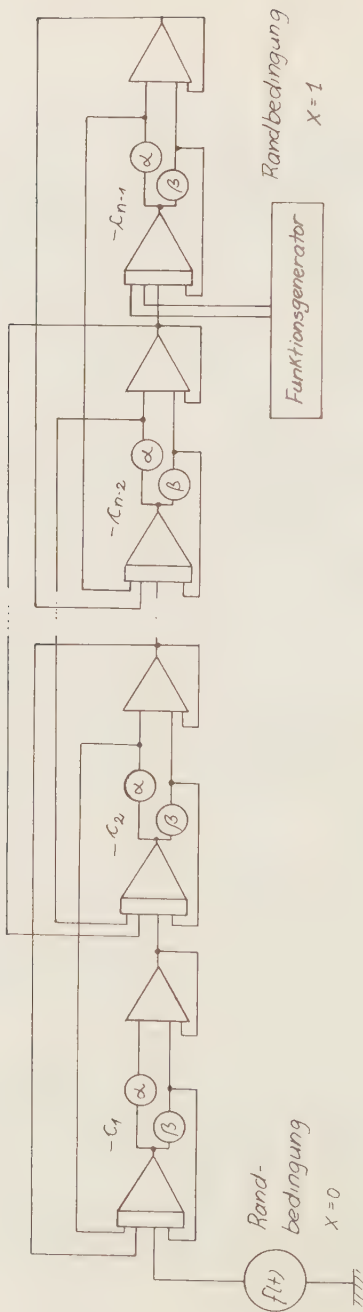


Bild 22 : Prinzipschaltbild der reinen Analogsimulation der Diffusionsgleichung

Daraus läßt sich für den experimentellen Aufbau eine wichtige Folgerung ziehen: es genügt bereits eine verhältnismäßig kleine Beruhigungsstrecke, um die Meßstrecke als von den aktuellen Randbedingungen - Kolonnenkopf und -sumpf - unbeeinflußt zu betrachten.

Der vorteilhafteste hybride Ansatz einer Simulation wird mit der CONTINUOUS-SPACE-DISCRETE-TIME (CSDT)-Methode gemacht, /35/. Bild 23 zeigt ein Schema für die Diffusionsgleichung. Hierbei entspricht die Zeitbasis des Analogrechners der Ortskoordinate x der Differentialgleichung, während die normierte Zeit τ als diskreter Parameter in den Verlauf der Lösungskurven $c(x, i \Delta \tau)$ eingeht. Die Lösungsgeschwindigkeit ist nicht so hoch wie bei rein analoger Simulation, dafür kann das Ergebnis über große Zeiträume x und τ mit sehr guter Genauigkeit erhalten werden. Da der analoge Kreis mitgekoppelt und damit strukturinstabil ist, bildet die Stabilität der Algorithmen die Hauptschwierigkeit bei diesem CSDT-Verfahren. In /36/ ist ein stabiles Verfahren entwickelt, das es erlaubt, Feldprobleme hybrid zu lösen. Hierbei wird nach einer Modifikation der Ausgangsgleichungen die Integration von den beiden jeweiligen Ortsendpunkten x aus vorgenommen und die erhaltenen Zwischenergebnisse geeignet miteinander verknüpft.

Nach gewissen - zum Teil prinzipiellen - Änderungen konnte der in /36/ vorgeschlagene Lösungsweg auf dem Hybridrechner EAI 690 realisiert werden, /32/. Zur Ermittlung des Einflusses der verschiedenen Anregungen, Parameter und besonders der möglichen Randbedingungen auf die Lösungsprofile $c(x, B_0, \tau)$ sollen noch detaillierte Untersuchungen angestellt werden. Bild 24 zeigt mit einem hybriden Programm berechnete Verläufe der Gewichtsfunktion für zwei Reaktortypen: die eine Kurvenschar ergibt sich für den frei auslaufenden, also zweiseitig unendlichen Reaktor -Gl.(28) -; die zweite Kurvenschar beschreibt einen linksseitig begrenzten Reaktor mit der Randbedingung $c_{\text{norm}}(x=1, B_0, \tau)=0$. Ähnlich wie bereits in Bild 19 reicht auch hier der Einfluß der Randzone nur gering -15-20% - in das Reaktorinnere hinein. Bild 24 demonstriert augenfällig eine gewisse Schwäche der bisherigen Hybridsimulation:

1. Für den Bereich $0 \leq x \leq 0,8$ müßten die Kurvenscharen im Rahmen der Zeitchengenauigkeit übereinstimmen. Die Ursache für die Ungenauigkeit scheinen Potentiometer- und Rundungsfehler zu sein.

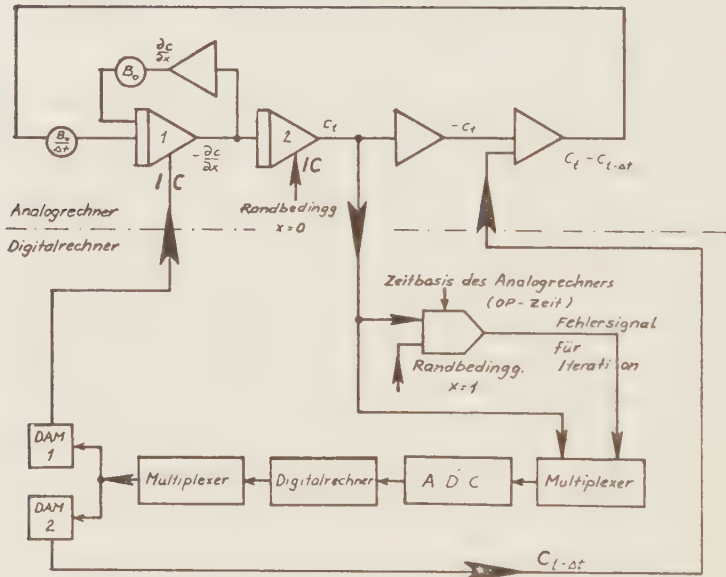


Bild 23 : Schema CSDT-Methode zur Lösung der Diffusionsgleichung auf einem Hybridrechner

Eine Simulation der Diffusionsgleichung mit dieser Anordnung ist nicht ohne weiteres möglich, da der analoge Kreis zweifach instabil ist:

1. Integrierer 1 ist über einen Inverter mitgekoppelt; $-B_0 > 1$;
2. Die Analogschleife gebildet aus den beiden Integriern und den zwei Invertiern (gerade Anzahl von Invertiern!) arbeitet nur unter Berücksichtigung des endlichen Integrationsintervalls $(0,1)$ und nur bei $B_0/dt = 1$ im linearen Arbeitsbereich der Komponenten. Dies läßt sich wegen der stets vorhandenen Abbruch- und Interpolationsfehler bei der digitalen Funktionsspeicherung während eines hybriden Arbeitszyklus nie erreichen. Es ergeben sich damit entweder monoton auf- oder abklingende Rechenverläufe.

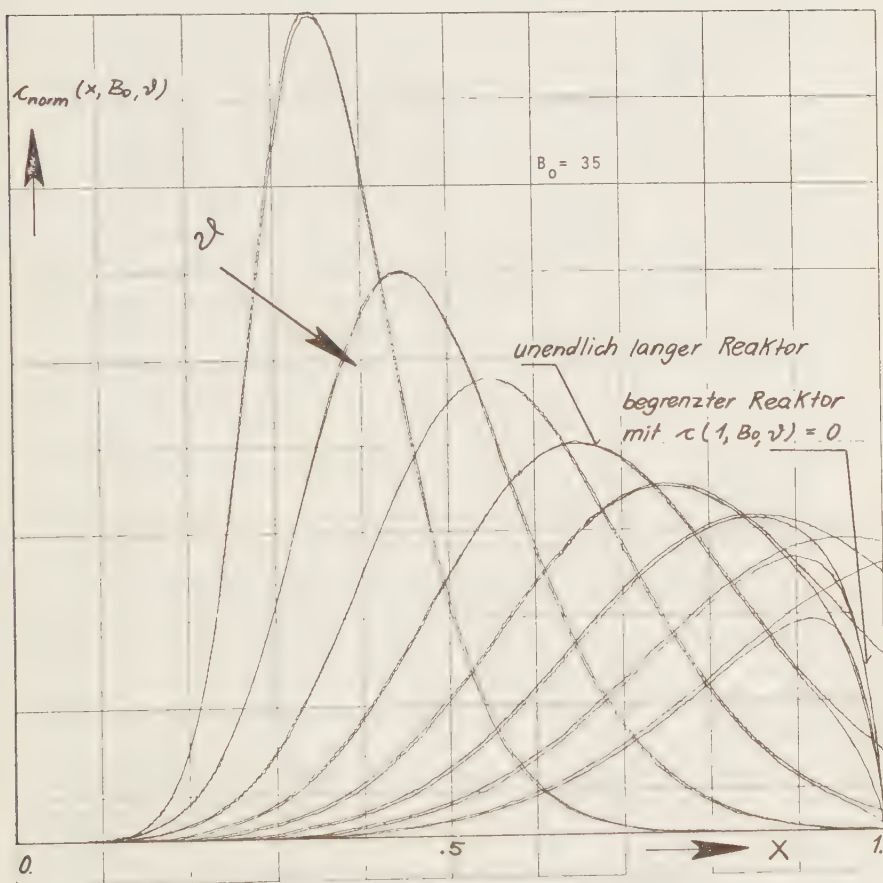


Bild 24 : Gewichtsfunktionen für ein- und zweiseitig unendlichen Reaktor
Hybridsimulation (CSDT) auf EAI 690, $\Delta t = 0,02$ sec.

2. Entsprechend Gl.28 müssen die x-Profile symmetrisch sein. Aufgrund des verwendeten hybriden Lösungsalgorithmus ergeben sich jedoch bei der Vorwärts-Rückwärtsrechnung Fehler, die sich in einem "Schwanz" ausdrücken. Abhilfe könnte durch Verkleinerung der Schrittweite (Δx) erreicht werden, die jedoch wiederum die Anzahl der nötigen Iterationsschritte erhöht, und damit zu erheblichen Rechen-(=Rundungs-)fehlern führen kann. Bei aller Flexibilität der Hybridlösung, die z.B. auch sehr einfach den Übergang von der bisher als konstant angenommenen Feldkenngröße $B_0 = \text{konst}$ zu ortsabhängigen Parametern D und v ermöglicht, sei angemerkt, daß i.a. eine wesentlich sorgfältigere Programmierarbeit geleistet werden muß. Hinzu kommt, daß hybride Algorithmen häufig - wie bereits aufgezeigt - prinzipiell instabil sind, so daß besondere Verfahren entwickelt werden müssen, die, da praktisch immer mit Rechenaufwand verbunden, nicht nur die Lösungszeit verlängert, sondern auch zu beträchtlichen A/D- bzw. D/A-Konversionsfehlern führen können.

I.4 Datenaufbereitung und -transfer

I.4.A Allgemeines

Von zentraler Bedeutung bei jeder Systemidentifizierung aufgrund gemessener Signalfolgen ist eine sorgfältige Aufbereitung der Meßwerte und ggf. weitgehende Befreiung von störenden Verfälschungen, bevor zur eigentlichen Identifizierung übergegangen werden kann.

Bei den durchgeführten Untersuchungen waren daher zunächst Fragen der Störbefreiung zu diskutieren, und es war zu klären, welche Maßnahmen ergriffen werden müssen, damit eine anschließende Identifizierung nicht von vornherein mit zu großen Fehlern aufgrund "unangenehmer" Meßwerte behaftet ist. Es wurde bereits erwähnt (siehe auch Bild 9), daß in der Anlage selbst, sowie in den elektrischen Versorgungseinheiten, sehr große Störungen zufälliger Natur vorlagen. In ungünstigen Fällen waren diese stochastischen Störsignale wesentlich größer als die von ihnen statistisch unabhängigen, künstlich erzeugten Testsignale - das Signal / Rauschverhältnis lag im Durchschnitt bei ca. 20% -. Den Einfluß dieser stochastischen Störungen auf die Identifizierung kann man - wie bereits erwähnt - durch die Anwendung der Korrelationsverfahren weitgehend beseitigen.

Wesentlich unangenehmer - da sie auch mit Korrelationstechniken nicht eliminiert werden können - waren jedoch Störungen von deterministischem Charakter:

Mit zunehmender Meßzeit lieferte die Wasserentsalzungsanlage eine Flusisigphase mit leicht ansteigender Ionenkonzentration, d.h. aber, daß die Mittelwerte der gemessenen Signalfolgen langsam wegdrifteten.

Diese Drift kann einmal zur Folge haben, daß die linearen Meßbereiche der Transmitter - bei zu scharfer Aussteuerung der Trägerfrequenzbrücken - verlassen und nichtlineare Signalverfälschungen erzeugt werden, zum anderen macht sich die Drift jedoch noch viel störender bei der Korrelationsanalyse bemerkbar. Hierbei können so große Fehler entstehen, daß eine Auswertung praktisch undurchführbar wird. Es wurde daher zunächst einmal in einem ausreichend großen Meßbereich gearbeitet, der die lang-samen, niederfrequenten Signalschwankungen (Drift) erlaubte.

Bei der Auswertung war es dann nötig, diese Signalverfälschung durch geeignete Kompensation weitgehend zu beseitigen, um dann anschließend noch eine zusätzliche, ausreichende Verstärkung der von den niederfrequenten Signalschwankungen befreiten Meßwerte vorzunehmen. Dies ist deshalb wichtig, damit die für eine digitale Signalspeicherung verwendeten A/D-Wandler die analogen Meßwerte mit größtmöglicher Auflösung dem Digitalrechner übergeben können. (Die A/D-Wandler besitzen eine Genauigkeit von 14 bit im Bereich ± 10 Volt.)

Daraus ergibt sich nun :

Vor einer ausführlichen Systemanalyse müssen von den gemessenen - stark gestörten - Signalfolgen folgende Kennwerte ermittelt werden:

1. Driftkoeffizienten

Bei extrem starken niederfrequenten Signalschwankungen können dabei ggf. bereichsweise verschiedene Koeffizienten berechnet werden.

2. Aussteuerungskoeffizienten

Hierzu ist es nötig, Mittelwert und Effektivwert - ggf. auch bereichsweise verschiedene - zu berechnen.

Prinzipiell läßt sich diese Datenaufbereitung - wenigstens soweit pro Meßfolge nur jeweils eine Berechnung nötig ist - so machen, daß ein erster Abschnitt der Meßwerte für die digitale Ermittlung verwendet wird, und

- nachdem sich die berechneten Parameter nur noch wenig ändern - daraufhin durch entsprechende geeignete Schaltmaßnahmen vom Digitalrechner die Komponenten des Analogrechners so beeinflusst werden, daß für den Rest der Daten Mittelwerte und Drift beseitigt und die Aufnahmeverstärker bzw. ADC richtig angesteuert sind.

Voraussetzung dabei ist, daß alle Parameter genügend schnell berechnet werden können, da sonst zuviel Information verschenkt wird und weiterhin, daß eine Signalfolge durch nur einen Satz Parameter zufriedenstellend gekennzeichnet ist.

Es stellte sich bei den Auswertungen bald heraus, daß der entstehende Informationsverlust unzulässig groß war. Der auf der Hybridrechenanlage EAI 690 automatisch ablaufende Auswertevorgang der gemessenen Daten wurde daher in zwei getrennten Läufen vorgenommen:

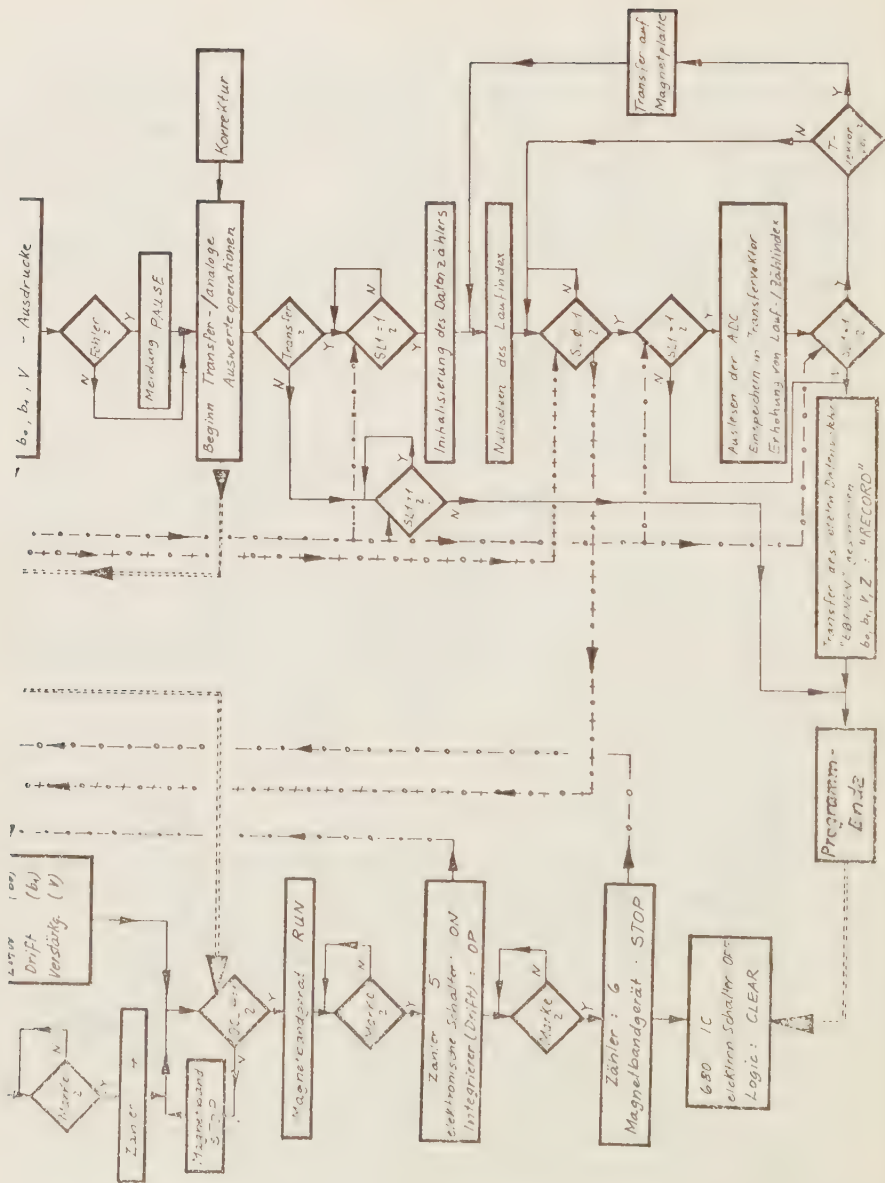
Im ersten Lauf, dem Datenaufbereitungslauf, berechnete ein Digitalprogramm - ggf. bereichsweise - Drift, Mittelwert und Effektivwert der drei Meßebenen. Nachdem das Magnetbandgerät mit der gespeicherten Meßinformation zurückgespult und wieder positioniert war, und parallel dazu der Digitalrechner sämtliche aus den ermittelten Parametern resultierenden Koeffizienteneinstellungen auf dem Analogrechner einschließlich eventuell nötiger ANALOG-TIME-SCALE-Modifikationen vorgenommen hatte, wurde im zweiten Lauf, dem Auswerte- und Transfer-Lauf, die Systemanalyse direkt mit dem Analog-Korrelator ISAC vorgenommen. Gleichzeitig wurden Abtastwerte für die spätere statistische Modellbildung digital auf der Magnetplatte des EAI 640 Systems abgespeichert.

Für diesen Vorgang mußten eine umfangreiche analoge Logikschaltung entwickelt und ein digitales Steuer- und Kontrollprogramm geschrieben werden. Bild 25 zeigt das Flußdiagramm, das im Zusammenhang mit dem Impulsplan (Bild 26 erläutert werden soll).

I.4.B Kurzbeschreibung des Digitalprogramms:

"Datenaufbereitung und -Transfer.

Nachdem das digitale Steuerprogramm sämtliche Variablen Deklarationen und Datenzuweisungen vorgenommen hat, werden die nötigen Konstanten (z.B. Abtastintervall h) und der Kommentar (Bearbeitername, Datum, usw.) eingegeben,



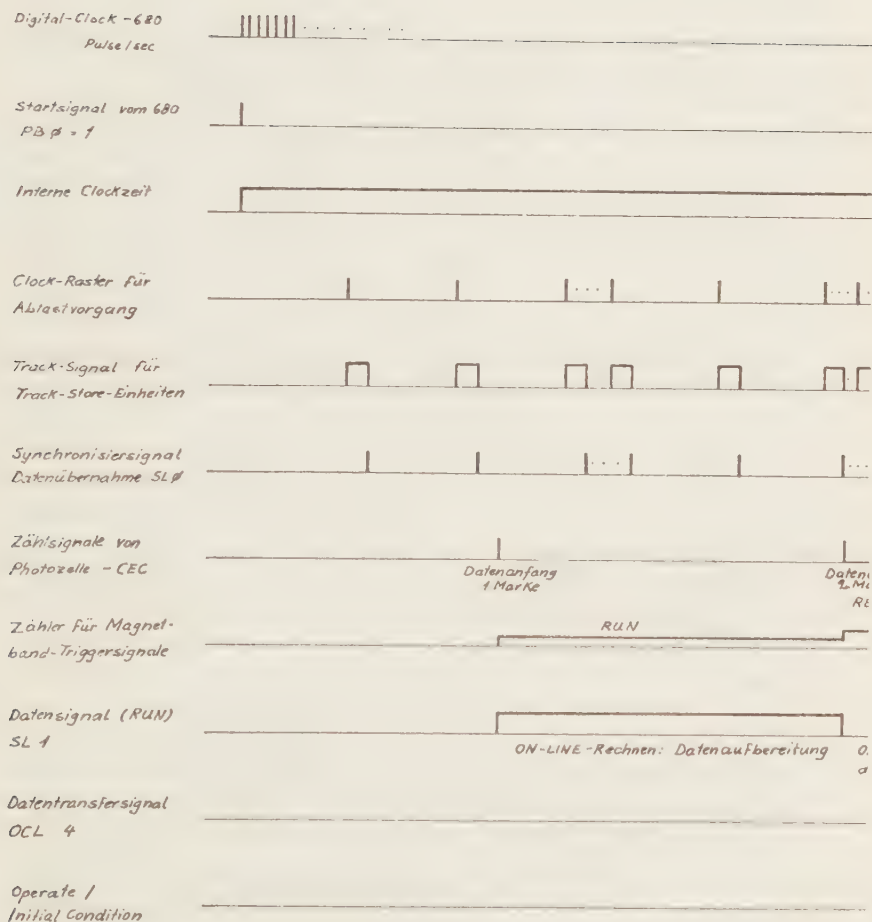
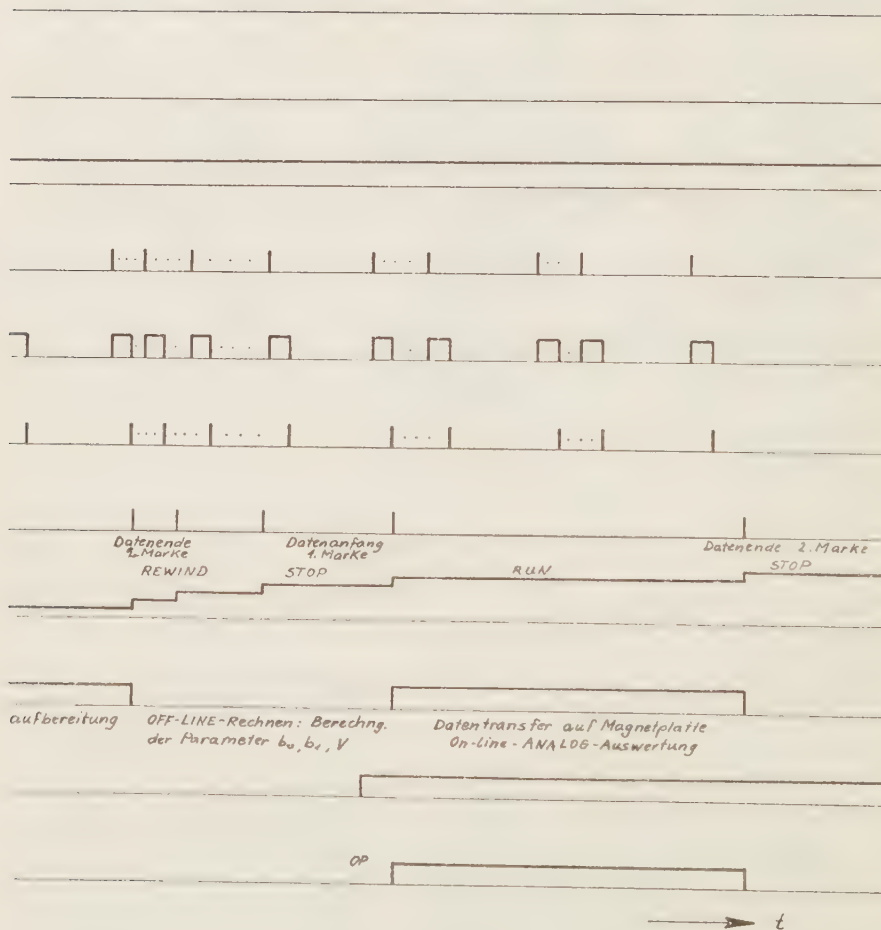


Bild 26 : Impulsplan der Hybridschaltung "Datenaufbereitung und -transfer"



und der Analogrechner angekoppelt und initialisiert. Falls Datentransfer vorgenommen werden soll, wird der Datefile "Ebenen" auf der Platte eröffnet. Der Digitalrechner gibt nach diesen vorbereitenden Arbeiten die Überwachung des Rechenablaufs an den Analogrechner ab, der das Magnetband, auf dem die gemessenen Signale registriert sind, steuert sowie über die TT als Kommunikationseinheit den Signalverarbeitungsablauf kommentiert bzw. auf Anfrage modifiziert. Durch Drücken von PB Ø werden das Magnetbandgerät und die Auswertelogik gestartet; das Zeitraster für den Abtastvorgang läuft ebenso an wie das Synchronisiersignal (SL Ø) und das TRACK/STORE-Signal der Eingangsverstärker. Sobald das Bandgerät die erste Markierung (SENSE LINE 1=1), die den Beginn der gemessenen Daten bestimmt, gefunden hat, beginnt der Datenaufbereitungslauf:

Nachdem das Synchronisiersignal eingetroffen ist, werden Daten parallel aus dem Analogrechner übernommen und die nötigen Zwischenrechnungen für die Ermittlung von Mittelwert, Drift und Aussteuerung vorgenommen. Anschließend wird gewartet, bis wieder $SLØ = 1$, d.h. bis der nächste Datensatz vom Analogrechner gelesen werden soll. Dieser Übernahmesyklus wird solange wiederholt, bis das Magnetband die 2. Markierung (SENSE LINE 1 = 0), die das Datenende angibt, gefunden hat: Indem die entsprechenden Eingangsverstärker abgeschaltet werden, wird der Abtastvorgang beendet; der Digitalrechner beginnt gleichzeitig mit der OFF-line Berechnung der Parameter für den zweiten, den Transferlauf, während das Magnetbandgerät zurückgespult wird. Nachdem der Analogrechner vom Digitalrechner entsprechend der ermittelten Koeffizienten modifiziert und damit für den Datentransferlauf bereit gemacht ist, erhält der Analogrechner über eine OCL ein entsprechendes Signal. Sofern das Magnetband positioniert ist, kann der zweite Lauf beginnen, andernfalls wartet der Digitalrechner bzw., falls die Positionierung des Bandes schneller als die Parametermodifikation durch den Digitalrechner war, wartet der Analogrechner. Es sei hierbei noch angemerkt, daß auf dem Analogrechner nicht genügend genau zu realisierende Parametereinstellungen automatisch korrigiert und auf der TT kommentiert werden.

Der zweite Magnetbandlauf beginnt nun mit der Abfrage, ob Datentransfer zur Magnetplatte oder On-line-Datenauswertung erfolgen soll. Falls die gemessenen Signale nur mit externen Auswertegeräten (Analogkorrelator ISAC, usf.)

analysiert werden sollen, erfolgt normalerweise kein Datentransfer. Durch SENSE-SWITCH E kann jedoch parallel zur Direktauswertung auch eine Platzenzwischenspeicherung veranlaßt werden. Der Datentransfer erfolgt nun schubweise - in einem Übernahmezyklus wie bereits oben beschrieben -, indem die in den drei Meßebenen registrierten Signale nacheinander in den Datenfile "Ebenen" eingespeichert werden. Insgesamt werden jeweils 3 x 44 Worte (Einwortdarstellung, da dies der Genauigkeit der ADC entspricht) in einen Transfer-Record eingeschrieben. Nachdem das Bandgerät durch die zweite Datenmarke den Abtast/Auswertevorgang abgeschlossen hat, werden der Analogrechner abgekoppelt und anschließend die den Lauf kennzeichnenden Parameter einschließlich Bearbeitername, Datum sowie Versuchskennwerten in zum Datenfile "EBENEN" gehörigen Parameterfile "RECORD" abgespeichert.

Die Bilder 27 und 28 zeigen die Analogrechenschaltung, die in Verbindung mit dem eben beschriebenen Digitalprogramm Datenaufbereitung und -transfer vornimmt. Zur flexiblen Einstellung der Abtastfrequenz (BCD 3) sowie der STORE-Zeit (BCD 1) der TRACK/STORE-Verstärker 001, 011, 091 wurden BCD-Zähler, die sich über Handrändel leicht verändern lassen, verwendet. Das von den auf dem Magnetband aufgeklebten Blinkmarken erzeugte Signal gelangt über die Schaltung - Bild 28 - als "blip" zum Analogrechner, wo es zur Steuerung des Hybridprogramms dient. Die schnellen elektronischen D/A-Schalter 04, 09, 94 (Bild 27), die nur für die Datenzeit (SL 1=1) durchgeschaltet sind, verhingern, daß während des schnellen Rücklaufs der Analogrechner in die Übersteuerung kommt und nehmen außerdem die elektrische Anpassung des Magnetbandgeräts an den Analogrechner vor.

Bild 27 ist zu entnehmen, daß die Parametervariationen sämtlich über sog. DIGITAL-ANALOG-MULTIPLIZIERER (DAM) erreicht wurden, die damit als digitale Potentiometer anzusehen sind:

- | | |
|-----------|--|
| DAM 3,4,5 | nehmen die Mittelwertkompensation vor |
| DAM 7,8,9 | ziehen entsprechend den ermittelten Driftverläufen über die Integrierr 0,35,90 mit der Meßzeit ansteigende/abfallende Spannungen vom registrierten Signalverlauf ab. |



Bild 27 : Anologschaltung "Datenaufbereitung und -transfer"

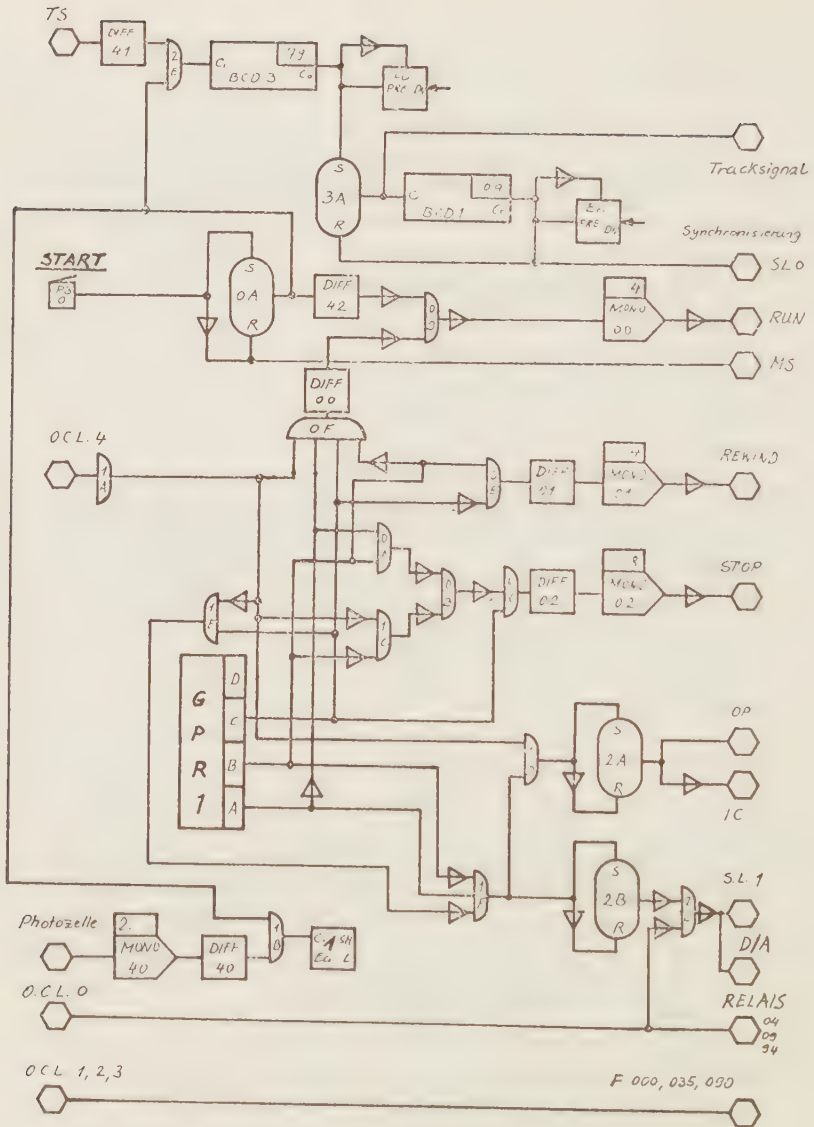


Bild 28 : Logikschaltung "Datenaufbereitung und -transfer"

DAM 10,11,12 bestimmen als Rückführungen die Verstärkung der T/S-Verstärker 1,11,91.

Nachdem nun die analoge Auswerteschaltung beschrieben ist, soll angegeben werden, nach welchen Gesichtspunkten das digitale Steuerprogramm die Parametermodifikationen am Analogrechner ermittelt.

I.4.C Grundlagen zur Ermittlung der Laufparameter

Bei der Berechnung der Driftkoeffizienten und der Mittelwertkorrekturen wird von folgenden Überlegungen ausgegangen /22/:

Gegeben sei eine Folge $\{u_n\}$, $n=1,2,\dots,N$ von Meßwerten, die aus dem kontinuierlichen Meßsignal $u(t)$ mit der konstanten Abtastfrequenz $f_{ab} = \frac{1}{n}$ genommen wurde. Diese Folge werde durch ein Polynom vom Grade k

$$\tilde{u}_n = \sum_{k=0}^K b_k (n \cdot h)^k \quad n = 1, 2, \dots, N$$

approximiert. Im vorliegenden Falle ist $k=1$, da die gemessene, mit störendem Mittelwert und Drift verfälschte Signalfolge $u(n \cdot h)$ durch

$$u(n \cdot h) = \tilde{u}_n - x_n = b_0 + b_1 \cdot n \cdot h + x_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

beschrieben sein soll. $x_n = x(nh)$, $n=1,2,\dots,N$ ist dabei die gesuchte ungestörte Testsignalfolge, die sich bei bekannten b_0 und b_1 ergibt zu

$$x_n = x(n \cdot h) = u(n \cdot h) - b_0 - b_1 \cdot n \cdot h \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (31)$$

Die in Gl.(31) enthaltenen Koeffizienten b_0 und b_1 werden so bestimmt, daß der Fehler zwischen der gemessenen Folge $u(nh)$ und der sie approximierenden Folge $\tilde{u}(nh)$ im quadratischen Mittel minimal wird:

$$\sum_{n=1}^N (u_n - \tilde{u}_n)^2 = \sum_{n=1}^N \left\{ u_n - \sum_{k=0}^1 b_k \cdot (n \cdot h)^k \right\}^2 \stackrel{!}{=} \text{MINIMUM}. \quad (32)$$

Aus Gl.(32) ergeben sich nach partieller Differentiation bezüglich b_0 und b_1 ($k+1=2$)-Bestimmungsgleichungen, aus denen sich dann b_0 und b_1 ermitteln zu:

$$b_0 = \frac{2(2N+1) \sum_{n=1}^N u_n - 6 \sum_{n=1}^N n \cdot u_n}{N(N-1)} \quad (33)$$

$$b_1 = \frac{12 \sum_{n=1}^N n \cdot u_n - 6(N+1) \sum_{n=1}^N u_n}{h \cdot N(N+1)(N-1)} \quad (34)$$

Aus den abgetasteten Signalfolgen sind damit die Summen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &\triangleq \text{"Mittelwert"} \triangleq \text{ULWM(I)} \\ \sum_{n=1}^N n \cdot u_n &\triangleq \text{"erstes Moment"} \triangleq \text{U1M(I)} \end{aligned}$$

ON-LINE zu ermitteln und entsprechend Gl.(33) und (34) zu verknüpfen.

Bekanntlich ist bei allen Hybridproblemen der Schnittstelle zwischen Analog- und Digitalteil besondere Beachtung zu schenken. Im Falle der Analog-zu-Digital-Konversion bedeutet dies, daß den A/D-Wandlern ein ausreichend großes Signal angeboten werden muß, damit die im Analogrechner vorliegende elektrische Spannung mit zufriedenstellender Genauigkeit als 14-stellige Binärzahl im Digitalrechner erscheint. Es ist daher nötig, die gemessenen und von Mittelwert und Drift befreiten Meßwerte so zu verstärken, daß die Eingangsverstärker der ADC (± 10 V Spannungsbereich) voll ausgesteuert sind. Zur Beurteilung des Leistungspegels eines Signals wird sein Effektivwert verwendet, der ebenso wie die Kenngrößen für Mittelwerte und Drift im Datenaufbereitungslauf ermittelt wird.

(Im Programm mit B2(I) bezeichnet). Dieser Effektivwert kennzeichnet aber zunächst nur den Leistungspegel des gestörten Signals. Es läßt sich jedoch zeigen, daß man von ihm relativ einfach auf den Leistungspegel des von Störungen (also Drifterscheinungen und Mittelwert) befreiten eigentlichen Testsignals schließen kann. Für den Effektivwert σ_x des ungestörten Testsignals $x(t)$ bzw. $x(nh)$, $n=1,2,\dots,N$, läßt sich nach Gl.(31) ein Schätzwert berechnen zu

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^2(nh) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{ u(nh) - b_0 - b_1 nh \}^2 \quad (35)$$

Hierbei ist $u(nh)$ die gestörte Meßfolge, b_0 und b_1 seien nach den Gl.n.(33) und (34) berechnet. Es folgt ausquadriert aus Gl.(35)

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{ u^2(nh) + b_0^2 + b_1^2 (nh)^2 - 2 b_0 u(nh) - 2 b_1 n u(nh) + 2 b_0 b_1 nh \} \quad (36)$$

In Gl.(36) lassen sich zunächst die Potenzsummen berechnen:

es ist

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N b_1^2 (n\hbar)^2 = \frac{b_1^2 \hbar^2}{N} \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{1}{6} b_1^2 \hbar^2 (N+1)(2N+1)$$

sowie

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 2 b_0 b_1 n \hbar = \frac{2 b_0 b_1 \hbar}{N} \sum_{n=1}^N n = b_0 b_1 \hbar (N+1) .$$

Weiterhin wurden die Teilsummen

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u^2(n\hbar) \quad \triangleq \quad B2(I)$$

und

$$\frac{2 b_0}{N} \sum_{n=1}^N u(n\hbar) \quad \triangleq \quad 2 b_0 \cdot \text{ULMW}(I)$$

sowie

$$\frac{2 b_1 \hbar}{N} \sum_{n=1}^N u(n\hbar) \cdot n \triangleq 2 b_1 \hbar \cdot \text{U1M}(I)$$

bereits ermittelt, so daß der Leistungspegel des von den angegebenen Störungen befreiten Signals $x(t)$ bekannt ist. In der Nomenklatur des anliegenden Digitalprogramms bestimmt sich σ_x^2 deshalb zu:

$$\sigma_x^2 = B2(I) + b_0^2 + \frac{1}{6} b_1^2 \hbar^2 (N+1)(2N+1) - 2 b_0 \cdot \text{ULMW}(I) - 2 b_1 \hbar \cdot \text{U1M}(I) + b_0 b_1 \hbar (N+1) . \quad (36)$$

Für die Ermittlung der für eine möglichst genaue Datenkonversion nötigen Rückführung der T/S-Verstärker (Bild 21, wird nun von folgender Überlegung ausgegangen:

Unter der Voraussetzung, daß praktisch normal verteilte Signale angenommen werden können, liegen 99,9% der vorkommenden Signalwerte im Bereich $\pm 3\sigma$. Dieses Werteintervall soll nun bei der Analog-zu-Digital-Wandlung auch signifikant sein, d.h. die Verstärkung V wird so gewählt, daß

$$3 \cdot \sigma_{x\text{-resultierend}} = 3 \cdot \sigma_{x\text{-gemessen}} \cdot V = 1, \quad (37)$$

entsprechend 10 Volt am Analogrechner.

Zur weiteren Begründung von Gl.(37) sei angeführt, daß bei den registrierten Signalen umfangreiche Untersuchungen angestellt wurden, die zeigten, daß eine höhere Verstärkung - etwa $2 \sigma_{\text{res}} = 1$ zu einer unzulässig hohen Anzahl

von Bereichsüberschreitungen führte, die sich beim Analogrechner ja bekanntlich als Übersteuerung der Verstärker äußern. Bei einer Auslegung nach Gl.(37) ergab eine Zählung der Übersteuerungen pro Meßzeit - der Übersichtlichkeit halber wurde die dafür erforderliche Schaltung nicht in die Darstellung von Bild 28 aufgenommen -, daß durchschnittlich nur mit etwa 5 bis 10 vom Analogrechner zählbaren Bereichsüberschreitungen gerechnet werden muß, einer Zahl, die nur zu unwesentlichen Signalverfälschungen führt.

Nachdem nun die Ermittlung der Laufparameter erläutert wurde, sei noch angemerkt, daß eine Bestimmung des Vertrauensbereiches der einzelnen Werte nicht vorgenommen wurde, da diese Werte ja nicht Schwerpunkt der Untersuchungen waren, sondern nur die Analyse der gemessenen Signalfolgen erleichtern sollten. Weiterhin fußt ihre Ermittlung auf der wegen des noch unbekannten Leistungspegels ggf. recht ungenauen A/D-Wandlung der Originaldaten $u(nh)$. Die daher prinzipiell noch vorhandenen Testsignalverfälschungen erwiesen sich bei den durchgeführten Untersuchungen jedoch als so gering, daß eine weitergehende Störbefreiung nicht sinnvoll schien.

I.4.D Datentransfer zur Magnetplatte des Hybridsystems

In den bisherigen Ausführungen wurde noch nicht auf die Wahl der Abtastfrequenz $f_{ab} = \frac{1}{h}$ eingegangen. Grundsätzlich läßt sich feststellen, daß f_{ab} zunächst von zwei wesentlichen Randbedingungen bestimmt wird: Einmal ist f_{ab} durch das Hybridsystem selbst auf einen Höchstwert festgelegt, der sich aus der A-D-Konversion sowie der nötigen Digitalrechenzeit berechnet (Hard-und Software-Operationszeit), zum andern ist unter Berücksichtigung des Abtasttheorems für die höchsten vorkommenden, signifikanten Signalfrequenzen eine Mindestabtastfrequenz erforderlich. Was den Frequenzumfang der Testsignale anbelangt, so wurde er zunächst vom angeschlossenen Rauschgenerator (Bild 11) bestimmt; es wurde ein binäres elektrisches Rauschsignal verwendet, dessen Leistungsdichtespektrum die schon oben gezeigte $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ -Charakteristik mit $f_c = 10$ Hz hatte; der 3 dB-Punkt liegt hier bei ca. 4,5 Hz. Damit ist das Schaltsignal des Magnetventils wesentlich hochfrequenter als die von der im Vergleich dazu sehr trägen Modellanlage noch zu verarbeitenden höchsten Frequenz: die Eckfrequenz des an der ersten

Meßebene registrierten - und für die spätere Systemanalyse als eigentliches Eingangssignal zu betrachtenden - Signals lag stets unterhalb von 0,4 Hz. Damit die Off-line-Signalauswertung nicht ebensoviel Zeit in Anspruch nahm wie die Messungen - nämlich 2-3 Stunden pro Lauf - wurde durch einfache Erhöhung der Abspielgeschwindigkeit des frequenzmodulierten Magnetbandgerätes von $1\frac{7}{8}$ ips auf 15 oder 60 ips eine Frequenztransformation vorgenommen. Die vom Hybridrechner zu verarbeitenden Meßsignale - und von diesen nur die noch relativ hochfrequenten Eingangssignale der Strecke - lagen damit in einem Frequenzbereich von

0 Hz ... 4 Hz bei 15 ips Wiedergabegeschwindigkeit
oder 0 Hz ... 13 Hz bei 60 ips Wiedergabegeschwindigkeit.

Unter Berücksichtigung des Abtasttheorems - auf das später noch einmal eingegangen werden muß - betragen damit die entsprechenden minimalen Abtastfrequenzen

etwa 10 Hz bei 15 ips
bzw. etwa 30 Hz bei 60 ips Wiedergabegeschwindigkeit.

Nachdem damit die untere vom Signal her erforderliche Grenze der Abtastfrequenz festgelegt wurde, kann die obere durch das Hybridsystem bestimmte Grenze relativ einfach aus den entsprechenden Unterlagen ermittelt und - nach einer durch Austesten der Programmschritte geringfügigen Korrektur - angegeben werden zu

$f_{ab \max} \sim 6,3$ kHz bei Einwortzahlendarstellung
 $f_{ab \max} \sim 2,8$ kHz bei Zweiwortzahlendarstellung;

jeweils für 3 ADC-Kanäle.

Aus dem bisherigen erkennt man, daß prinzipiell keine Schwierigkeiten bei der AD-Konversion entstehen dürften. Leider blieb bei diesen Überlegungen noch eine wichtige mit der eigentlichen AD-Wandlung nicht in Zusammenhang stehende Tatsache außer Betracht: im zweiten, dem Datentransferlauf sollen die von Störungen befreiten Meßwerte zur späteren Systemanalyse auf dem schnellen Massenspeicher des Systems, der Magnetplatte, aufbewahrt werden. Diese Magnetplatte, die als Festplatte mit 64 örtlich feststehenden Lese/Schreibköpfen ausgestattet ist, hat nur eine mittlere Zugriffszeit von ca. 17 ms. Dies bedeutet, daß bei einer konstanten Umlaufgeschwindigkeit der

Platte von 1500 Upm etwa 40 ms vergehen, bis die Platte eine ganze Umdrehung vorgenommen hat, d.h. wieder in ihre Ausgangslage zurückgekehrt ist.

Zum Verständnis der dadurch bei der Datenübertragung auftretenden Schwierigkeiten muß kurz auf die Organisation des Magnetplattensystems eingegangen werden. Die Magnetplatte kann als schneller Datenspeicher Information in verschiedenster Form übernehmen:

1. Quellenprogramme (SOURCE)
2. Kompilierte Programme (OBJECT)
3. Rechenfertige Programme (CORE IMAGE)
4. Daten.

Jegliche Menge von Information (Pkt. 1 bis 4) auf der Platte ist an eine bestimmte feste Organisationsform gebunden, die als FILE bezeichnet wird. Ein FILE zerfällt in kleinste Untereinheiten, die sog. RECORDS, die maximal 528 16-bit-Worte lang sind. Die kleinste lesbare bzw. adressierbare Einheit auf der Platte ist dabei 44 16-bit-Worte lang (= ein Sektor), während die auf einmal einschreib- bzw. lesbare Information bis zu 528 Worte lang sein kann. Daraus folgt zunächst, daß Datentransfer zur Platte nur schubweise erfolgen kann und auf eine Höchstmenge von 528 Worten beschränkt ist. Sollen mehr als 528 Daten auf die Platte übertragen werden, muß die Platte neu adressiert, d.h. neu positioniert werden; dies bedeutet jedoch nach dem oben Gesagten, daß im ungünstigsten Fall fast eine volle Umdrehung der Platte, das sind 40 ms, abgewartet werden muß, bis wieder ein Datenschub von maximal 12 mal 44 = 528 Worten seriell eingeschrieben werden kann. Während dieser Positionierung wartet der Digitalrechner, was zur Folge hat, daß eventuell inzwischen an den ADC einlaufende Signalwerte nicht festgehalten werden. Ohne eine aufwendige Programmierung in Maschinensprache läßt sich diese grundsätzliche Schwierigkeit bei der Datenübermittlung zur Platte nur dadurch umgehen, daß die Abtastfrequenz so niedrig gehalten wird, daß auf jeden Fall ausreichend Zeit zur Positionierung der Platte gegeben ist. Praktisch bedeutet dies jedoch, daß nur eine Abtastfrequenz von maximal 25 Hz möglich ist, was wiederum zur Folge hat, daß nur eine Erhöhung der Wiederabgabegeschwindigkeit des Magnetbandgerätes auf 15 ips sinnvoll erscheint. Für die ausgeführten Versuche wurde daher folgende Vorgehensweise gewählt:

1. Es wird als feste Abtastfrequenz die größtmögliche, nämlich $f_{ab} = 25 \text{ Hz}$ gewählt
(BCD 3 = 39 bei 10^3 blip/sec auf TS-Eingang)
2. Die auf der Platte gespeicherten Signalwerte werden in einem ersten Analyselauf auf Redundanz untersucht und festgestellt, wieviele Daten auf der Platte unter Berücksichtigung des Abtasttheorems ausgelassen werden können, ohne daß Signalverfälschungen entstehen. Auf diese Weise wird eine ggf. niedrigere Abtastfrequenz als 25 Hz simuliert. Sollte sich herausstellen, daß für die gespeicherten Signale eine höhere Abtastfrequenz nötig war, so kann der Rechenablauf unterbrochen und der Datentransfer rückgängig gemacht werden. Bei den analysierten Signalfolgen beider Aufstromkolonnen war dies jedoch nie der Fall.

Bevor auf eine weitere digitale Systemanalyse eingegangen werden soll, wird im folgenden Abschnitt über eine erste Analysemethode mit Hilfe des Analogkorrelators ISAC berichtet werden.

I.5. Ermittlung der Bodensteinzahl aus den gemessenen Ausgangs/Eingangs-Signalfolgen

I.5.A Zur Bestimmung der Bodensteinzahl aus der Korrelations- und Gewichtsfunktion

Zur Ermittlung der Abhängigkeit des Dispersionskoeffizienten von den Strömungsgeschwindigkeiten von Flüssig- und Gasphasen wurden die gemessenen Signalfolgen zunächst einer Korrelationsanalyse unterzogen. Hierzu wurden -entsprechend den obigen Ausführungen - die von Störungen befreiten Meßsignale einem Analogkorrelator zugeführt, /37/, und sowohl die Auto- als auch Kreuzkorrelationsfunktionen aller verschiedenen Meßebenen berechnet. Bekanntlich erfordert die statistische Systemanalyse die Lösung von Integralen der Form

$$\Phi_{xy}(\tau, T_I) = \frac{1}{T_I} \int_0^{T_I} x(t-\tau)y(t) dt \approx \int_0^\infty g(u) \phi_{xx}(\tau-u) du, \quad (38)$$

wenn $x(t)$, $y(t)$ Eingangs- bzw. Ausgangssignal des durch seine Gewichtsfunktion $g(t)$ beschriebenen Systems sind, /18/.

$\phi_{xy}(\cdot)$ und $\phi_{xx}(\cdot)$ sind die Kreuzkorrelations- bzw. Autokorrelationsfunktionen der Signale $x(t)$ und $y(t)$. Die erstrebte Auflösung dieser Beziehung nach der Impulsantwort $g(t)$ wird dann besonders einfach, wenn die Eckfrequenz des Eingangssignals $x(t)$ groß ist im Vergleich zur dominierenden Eckfrequenz des untersuchten Systems. Dann gilt nämlich in guter Näherung

$$\phi_{xx} \approx \pi \cdot S_0 \cdot f(\tau),$$

mit S_0 als der frequenzunabhängigen spektralen Leistungsdichte. Daraus folgt

$$\phi_{xy}(\tau) \approx g(\tau); \quad (39)$$

d.h. die berechnete Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Eingangs- und Ausgangssignal eines Systems ist proportional zu dessen Gewichtsfunktion. Bild 29 zeigt die AKFen von Eingangs- und Ausgangssignal; man erkennt

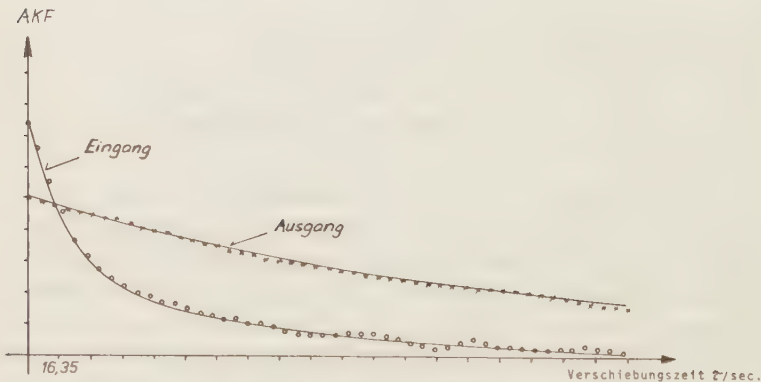


Bild 29 : Gemessene Autokorrelationsfunktionen von Eingangs- und Ausgangssignalfolgen

daß in erster Näherung mit der Vereinfachung nach Gl.(39) gearbeitet werden darf. Eine genauere Analyse muß jedoch sicherlich Gl.(38) exakt lösen.

Falls zur Ermittlung von $B_0 = B_0(v)$ approximative Lösungen angestrebt werden, kann eine Auswertung nach Gl.(39) auf jeden Fall einen gesicherten Startwert für die Rechenprozedur liefern, da man davon ausgehen darf, daß die gefundene erste Näherung sich nicht sehr wesentlich von dem exakten Paramern B_0 unterscheiden wird. Um mit Hilfe von Gl.(39) auf einen Näherungswert für $B_0 = B_0(v)$ zu schließen zu können, wurde zunächst nur die Lage des Maximums von $\vartheta_{xy}(\tau) \approx g(\tau)$ betrachtet. Für den Fall des zweiseitig unendlichen langen Reaktors, der von der Meßanordnung näherungsweise simuliert wurde, gilt dann

$$B_0 = \frac{2}{x^2 \tau_m^{-1} - \tau_m} \quad , \quad (40)$$

wobei τ_m der Wert der normierten Zeit τ ist, bei der die normierte Konzentration $c(\tau, x)$ für feste Werte x ihr Maximum erreicht. Für die Ortskoordinaten konnten natürlich nur die beiden Meßebenen 2 und 3, also $x = 0,38$ bzw. $x = 0,5$ (Spalte I und II) und $x = 1$ gewählt werden. Die Diffusionskonstante folgt aus Gl.(40) zu

$$D = \frac{vL}{B_0} = \frac{vL(x^2 \tau_m^{-1} - \tau_m)}{2} \quad , \quad (41)$$

τ_m wurde für die einzelnen vom Korrelator ISAC automatisch aufgezeichneten ϑ_{xy} -Verläufe graphisch ermittelt oder bei digitaler Verarbeitung durch ein kleines Rechenprogramm bestimmt. Hierzu bestand die Möglichkeit, parallel zum automatischen Aufzeichnen von $\vartheta_{xy}(\tau)$ durch den Analogkorrelator die zugehörigen Wertepaare $\{\vartheta_{xy}, \tau\}$ bzw. $\{g(\tau), \tau\}$ über ADC's dem Hybridrechner zur Berechnung des Maximums zu übergeben; (Bild 30, Programm-
anhang).

Nach der analogen Berechnung der Korrelationsfunktion zwischen zwei gemessenen Zeitfunktionen lag mit der Näherung von Gl.(39) sowie der Modellgleichung Gl.(28) ein grober Schätzwert für die hydrodynamische Ausbreitung kennzeichnende Bodensteinzahl B_0 vor. Zu ihrer Verbesserung wurden die gemessene KKF - d.h. näherungsweise die Gewichtsfunktion des Systems - sowie die Modellvorstellung in ein Rechenprogramm eingegeben, das ausgehend von dem groben Startwert aus Gl.(40) nach der Methode MARQUARDT approximativ eine genauere Lösung $B_0 = B_0(v)$ bestimmt. Dieses aus IBM-Share-Library stammende Digitalprogramm, /38/, -NLIN- konnte vom Institut für Technische

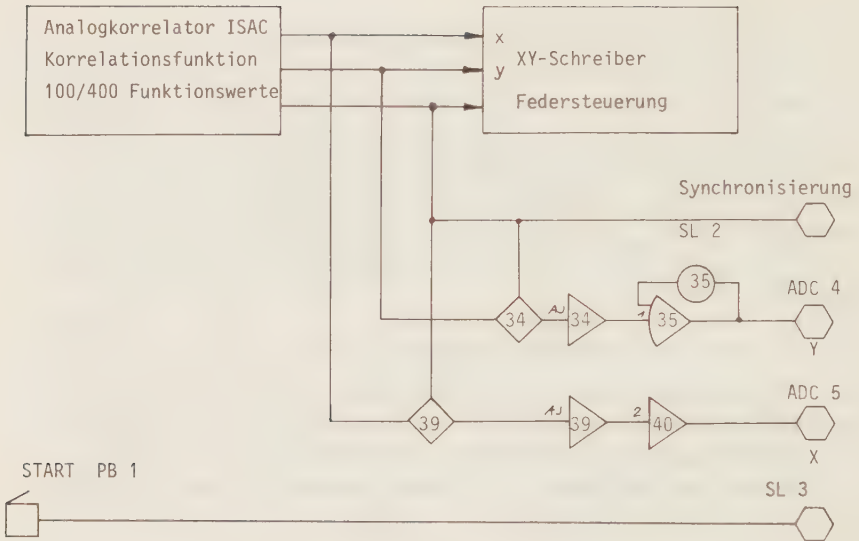


Bild 30 : Schema des Aufzeichnens und Speicherns der analog berechneten Korrelationsfunktionen

Chemie I der Universität Erlangen-Nürnberg übernommen und nach einigen Modifikationen für die Hybridrechenanlage am IRT-Erlangen verwendet werden, /39/. Der Lösungsalgorithmus dieses Programms geht von einem Modell nach Gl.(42) aus:

$$\tilde{y}_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}; b_1, b_2, \dots, b_k) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (42)$$

$\tilde{y}_i$ sind die theoretischen Werte der abhängigen Variablen y_i , $i=1, 2, \dots, n$ eines Modells, das m unabhängige Variable x_{ie} und k unbekannte Parameter b_j enthält. Bekannt sind die gemessenen n Beobachtungs- $(m+1)$ -Tupel

$$(y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Das Programm berechnet die Werte von b_j , indem das Funktional $\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2$ minimiert wird.

In /40/ sind die Grundlagen erläutert, in /41/ ist neben einer ausführlichen Darstellung des Lösungsalgorithmus ein Vergleich mit anderen Methoden vorgenommen.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß für eine genauere Systemanalyse Gl.(38) exakt gelöst werden muß. Dies kann dadurch geschehen, daß auf Gl.(38) eine geeignete Integraltransformation angewendet wird. Unterwirft man beide Seiten von Gl.(38) der Fourier-Transformation, dann folgt aus

$$\mathcal{F}\{\phi_{xy}\} = \mathcal{F}\left\{\int_0^{\infty} g(u) \cdot \phi_{xx}(t-u) du\right\}$$

nach einer Zwischenrechnung

$$S_{xy}(\omega) = F(i\omega) \cdot S_{xx}(\omega), \quad (42)$$

wobei bekanntlich $F(i\omega) = \mathcal{F}\{g(u)\}$ ist.

$$\text{Daraus folgt schließlich} \quad g(u) = \mathcal{F}^{-1} \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}. \quad (43)$$

Man erkennt, daß Gl.(43) für den Fall breitbandiger Erregung $x(t)$, d.h. $S_{xx}(\omega) = \text{konst.}$, übergeht in Gl.(39). Die Berechnung von Gl.(43) kann nun nur noch rein digital erfolgen. Hierzu müssen zunächst einige grundsätzliche Überlegungen angestellt werden, die die digitale Berechnung von Leistungsdichtespektren betreffen.

I.5.B Anmerkung zur digitalen Signalverarbeitung

Ehe eine digitale Berechnung von Gl.(43) angegangen werden kann, müssen einige Probleme angesprochen werden, die sich unmittelbar aus der besonderen Art der Signalverarbeitung ergeben. Soll eine digitale Berechnung nicht zu unververtretbaren Rechenzeiten und Kernspeicherkapazitäten auf der einen sowie zu nur groben Schätzwerten auf der anderen Seite führen, so müssen die Fragen von Abtastfrequenz und Meßdauer unter Berücksichtigung der Genauigkeit der Schätzwerte anhand des Frequenzangebotes der Meßdaten ausführlich diskutiert werden.

I.5.B.1 Abtastfrequenz

Bei der Bestimmung des angemessenen Abtastintervalls $h = \frac{1}{f_{ab}}$ (Bild 31)

steht man vor dem Problem, bei zu kleinem Intervall nur korrelierte und damit stark redundante Information zu erhalten und bei zu großem Intervall

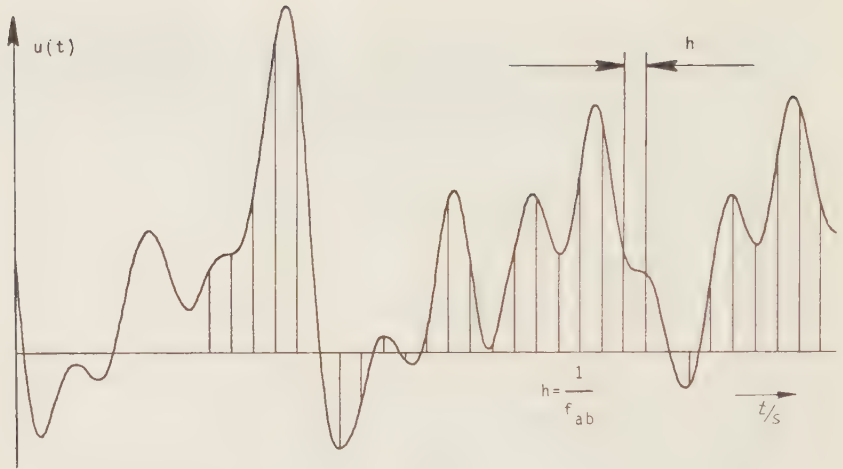


Bild 31 : Wahl des Abtastintervalls

auf ein - durch die Vermischung von hohen und niedrigen Frequenzkomponenten - falsches Frequenzangebot der Signale zu schließen (Bild 32). Während ersteres nur zu nicht vertretbarem Rechenzeit- und Rechneraufwand führt,

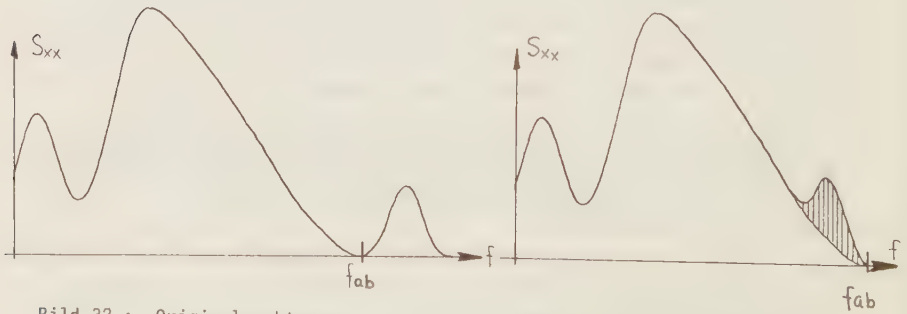


Bild 32 : Originalspektrum

Spektrum nach Abtastung

ergeben sich für den letzteren Fall ggf. völlig falsche Parameterabschätzungen. Bei einer Abtastfrequenz $f_{ab} = \frac{1}{h}$ ist nach dem Abtasttheorem $f_c = \frac{1}{2h}$

die höchste rekonstruierbare Frequenz, da bekanntlich mindestens zwei Abtastpunkte pro Periode nötig sind. Frequenzanteile der Meßdaten oberhalb $f_c = \frac{1}{2h}$ werden, wie Bild 32 zeigt, in den Frequenzbereich $0 \dots f_c$ abgebildet und verfälschen das Originalspektrum. Falls $\{x(t)\}$ echt bandbegrenzt ist, d.h. eine höchste Frequenz f_0 existiert, entsteht natürlich mit $f_c = 2 \cdot f_0$ kein Fehler. Im vorliegenden Anwendungsfall kann nun nicht davon ausgegangen werden, daß das Frequenzangebot von $\{x(t)\}$ bandbegrenzt ist. Man muß daher zu einem mehr praktischen Standpunkt übergehen und h so klein machen, daß der Einfluß etwa noch vorhandener höherer Frequenzanteile in $x(t)$ auf den zu untersuchenden Spektralbereich sehr gering ist. Als guten Erfahrungswert kann man dabei - wie eigene Messungen ergaben - die Abtastfrequenz f_{ab} 2,5 bis 4 mal so groß machen wie die höchste noch signifikante Frequenz f_d der Meßwerte. Natürlich ist man bestrebt, so nahe wie möglich an $f_{ab} = 2 \cdot f_c$ heranzukommen, um Rechenzeit und Gesamtaufwand zu reduzieren.

Im untersuchten Fall der Aufstromkolonne wird die Ermittlung der Abtastfrequenz f_{ab} vom hochfrequenten Eingangssignal $x(t)$ des Reaktors ausgehen: anhand eines Autoleistungsdichtespektrums $\hat{S}_{xx}(f)$ kann die höchste noch zu berücksichtigende Signalfrequenz f_d festgelegt werden. Für die Auswertung erwies sich während der Untersuchungen - auch aufgrund des Aprioriwissens über das prinzipielle Verhalten der Strecke - ein Definition von f_d nach Gl.(44) als praktisch und sinnvoll:

$$\frac{\hat{S}_{xx}(f=f_d)}{\hat{S}_{xx}(f=0)} = \frac{1}{20} \quad (44)$$

Als Abtastfrequenz wurde dann

$$f_{ab} = \frac{1}{h} = 4 \cdot f_d \quad (45)$$

gewählt. Damit war sichergestellt, daß für den untersuchten Frequenzbereich praktisch keine Frequenzverzerrungen auftraten. Es sei abschließend angemerkt, daß f_d nur dann näherungsweise mit der Eckfrequenz eines linearen Systems identifiziert werden darf, wenn $\hat{S}_{xx}(f)$ für Frequenzen oberhalb f_d genügend schnell abklingt.

Normalerweise ist $f_d \approx (5 \dots 10) \cdot f_{eck}$.

I.5.B.2 Meßzeit T

Während sich die Abtastfrequenz f_{ab} aus dem Frequenzangebot des (hochfrequenten) Eingangssignals der Aufstromkolonne - EBENE 1 - ermittelte, wird zur Festlegung der nötigen Meßzeit T das Spektrum des (wesentlich niederfrequenten) Ausgangssignals des Reaktors -EBENE 3 - herangezogen. Als Vorgriff auf die im nächsten Abschnitt behandelten Eigenschaften einer digitalen Frequenzanalyse, d.h. der Berechnung von Leistungsdichtespektrum und Frequenzgang, sei eine wichtige Beziehung zwischen Meßzeit T und kleinstem auflösbaren Frequenzzeitintervall B_e angegeben; es gilt nämlich

$$B_e = \frac{1}{N \cdot h} = \frac{1}{T} \quad \begin{array}{l} N \hat{=} \text{Anzahl der Daten} \\ h \hat{=} \text{Abtastintervall} \end{array} \quad (46)$$

Gl.(46) wird sofort anschaulich, wenn man bedenkt, daß durch die Abtastfrequenz $f_{ab} = \frac{1}{h}$ im wesentlichen ein digitales Schmalbandfilter der Bandbreite $B_e = \frac{1}{N \cdot h}$, mit N gleich der Anzahl der Meßwerte, festgelegt ist. Aus Gl.(46) folgt daher sogleich: damit auch das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals $y(t)$ der Aufstromkolonne genügend genau ermittelt werden kann, muß die Auflösungsbandbreite B_e , die über $T = \frac{1}{B_e}$ die Meßzeit T festlegt, entsprechend diesem zu erwartenden wesentlich niederfrequenten Spektrum sein. Für die praktische Analyse der gemessenen Daten ergibt sich damit die Notwendigkeit, in einem gesonderten Rechenlauf überschlägig $\hat{S}_{yy}(f)$ mit einem geschätzten $B_e^* = \frac{1}{T^*}$ zu berechnen. Aus dem Verlauf von $\hat{S}_{yy}(f)$ kann dann nach folgender Vorschrift ein, wie die Messungen zeigten, brauchbarer Wert für die Meßzeit T ermittelt werden:

Es wird gefordert, daß - näherungsweise Tiefpaßcharakter der Strecke vorausgesetzt - der Frequenzbereich $(0, f_{yeck})$ des Ausgangsspektrums $\hat{S}_{yy}(f)$ mindestens durch 30...50 Meßpunkte wiedergegeben wird. Nur dann läßt sich nämlich Frequenzgang und - nach der Rücktransformation in den Zeitbereich - Gewichtsfunktion des Reaktors mit zufriedenstellender Genauigkeit wiedergeben. f_{yeck} sei dabei die übliche (3 dB) Eckfrequenz, die der Digitalrechner nach Glättung des gemessenen Spektrums rasch ermitteln kann.

Der Operateur hat im ausgeführten Programm die Möglichkeit, eine Zahl n_0 entsprechend den individuellen Erfordernissen einzugeben:

$$B_e = \frac{f_{y \text{ eck}}}{n_0} ; \quad (47)$$

mit $n_0 \leq 0,2 \cdot N$, mindestens aber
30 bis 50 Meßpunkte.

Die Anzahl N der Meßdaten folgt mit dem aus der Frequenzanalyse von EBENE 1 bekannten Abtastintervall dann zu

$$N = \frac{1}{h^{(1)} \cdot B_e(3)} = \frac{n_0}{h^{(1)} \cdot f_{y \text{ eck}}(3)} \quad (48)$$

Die Indizes in Gl.(48) sollen andeuten, daß h aus "EBENE 1", $f_{y \text{ eck}}$ aus "EBENE 3" bestimmt wird.

I.5.C Berechnung von Leistungsdichtespektren

Nachdem im obigen Abschnitt bereits Vorschriften zur Festlegung von h und B_e bei digitaler Berechnung angegeben wurden, sollen nun diese Aussagen durch eine kurze Ableitung begründet werden.

I.5.C.1 Grundzüge der digitalen Berechnung

Es sei die Abtastfolge $y_k(t)$ des stationären Rauschprozesses bekannt. Für das endliche Zeitintervall $0 \leq t \leq T$ werde eine Größe $\hat{S}_{yy}(f, T, k)$ als Schätzwert für das wahre einseitige Leistungsdichtespektrum $S_{yy}(f)$ definiert durch:

$$\hat{S}_{yy}(f, T, k) = \frac{2}{T} Y_k^*(f, T) \cdot Y_k(f, T) = \frac{2}{T} |Y_k(f, T)|^2, \quad (49)$$

wobei

$$Y_k(f, T) = \int_0^T y_k(t) e^{-i2\pi f t} dt. \quad (50)$$

$Y_k(f, T)$ ist damit eine Musterfunktion der endlichen Fouriertransformation von $y_k(t)$. Entsprechend ist $Y_k^*(f, T)$ die konjugiert komplexe Form von $Y_k(f, T)$. Es sei hier angemerkt, daß nur diese endliche Fouriertransformierte für stationäre Zeitfolgen existiert, während die unendliche Fouriertransformierte für stationäre Daten nicht angegeben werden kann. Gl.(49) kann mit Gl.(50) umgeformt werden zu :

$$\hat{S}_{yy}(f, T, k) = \frac{2}{T} \int_0^T y_k(\eta) e^{i2\pi f \eta} d\eta \int_0^T y_k(\xi) e^{-i2\pi f \xi} d\xi$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T y_R(\eta) \cdot y_R(\xi) e^{-i2\pi f(\xi-\eta)} d\eta d\xi.$$

Mit $\tau = \xi - \eta$ und Umformung der Integrationswege läßt sich dieses Doppelintegral in die Summe von zwei Doppelintegralen überführen:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{yy}(f, T, R) &= 2 \int_{-T}^0 \frac{1}{T} \int_{-\tau}^T y_R(\eta) \cdot y_R(\eta+\tau) \cdot d\eta \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ &+ 2 \int_0^T \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} y_R(\eta) \cdot y_R(\eta+\tau) d\eta \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Bildet man nun den Erwartungswert dieser Gleichung, d.h. mittelt man über das Ensemble $\{\hat{S}_{yy}(f, T, k)\}$,

so folgt

$$\begin{aligned} E\{\hat{S}_{yy}(f, T, R)\} &= 2 \int_{-T}^0 \frac{1}{T} \int_{-\tau}^T E\{y_R(\eta) y_R(\eta+\tau)\} d\eta \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ &+ 2 \int_0^T \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} E\{y_R(\eta) \cdot y_R(\eta+\tau)\} d\eta \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Da die AKF von y definiert ist als
ergibt sich weiter

$$\Phi_{yy}(\tau) = E\{y_R(\eta) y_R(\eta+\tau)\},$$

$$E\{\hat{S}_{yy}(f, T, R)\} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \Phi_{yy}(\tau) \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau,$$

wobei die Integration über y ausgeführt wurde. Läßt man nun die Meßzeit T über alle Grenzen wachsen, so folgt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\{\hat{S}_{yy}(f, T, R)\} = 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{yy}(\tau) \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \quad (51)$$

Mit einer modifizierten Form der WIENER-KHINTCHINE-Relation erweist sich somit der Grenzwert von Gl.(51) als das Autoleistungsdichtespektrum von $y(t)$. (Modifiziert, da die WIENER-KHINTCHINE-Relation für das zweiseitige Leistungsdichtespektrum gilt).

Der Berechnung des Leistungsdichtespektrums auf dem Digitalrechner EAI 640 liegen diese aufgezeigten Überlegungen zugrunde. Es sei angemerkt, daß das Leistungsdichtespektrum damit in Analogie zur praktischen Meßvorschrift definiert wurde (Bild 33).

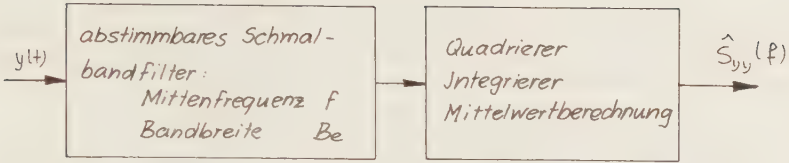


Bild 33 : Messung des Leistungsdichtespektrums

Genau wie bei der analogen Leistungsdichtespektrumsberechnung lassen sich auch im Falle digitaler Behandlung der statistische Fehler und die Verschiebung von $S_{yy}(f, T, k)$ ermitteln. Eine ausführliche Diskussion dieser Frage für verschiedene digitale Filterformen (Bild 33) ist in /42/ vorgenommen. Von den dort ausgeführten typischen Fällen ist für die vorliegende Analyse nur der von Interesse, wo das zu analysierende Spektrum konstant im Bereich des Bandfilters, d.h. der Auflösungsbandbreite B_e . Damit kann der Verschiebungsfehler der Abschätzung als klein im Vergleich zum statistischen Fehler angenommen werden, welcher dann allein die erforderliche Meßzeit festlegt.

Entsprechend Gl.(50) ist $Y_k(f, T, k)$ komplex, wobei noch gezeigt werden kann, daß Real- und Imaginärteil nicht korrelierte Zufallsgrößen sind, die keinen Verschiebungsfehler und gleiche Streuung besitzen. Falls $y(t)$ - und dies kann nach den oben gemachten Aussagen angenommen werden - Gauß-verteilt ist, erweisen sich der Real- und der Imaginärteil der Fouriertransformierten von $y(t)$ ebenfalls als normalverteilt. Damit folgt, daß der Schätzwert für das Leistungsdichtespektrum

$$|Y(f, T, k)|^2 = Y_{\text{REAL}}^2(f, T, k) + Y_{\text{IMAG}}^2(f, T, k)$$

die Summe der Quadrate zweier unabhängiger Gauß-verteilter Zufallsvariablen ist. Daher wird jede einzelne Frequenzkomponente $S_{yy}(f, T, k)$ eine Chi-Quadrat-Verteilungsdichtefunktion mit zwei Freiheitsgraden besitzen, /22/.

Diese χ^2_2 -Verteilung ist aber unabhängig von der Meßzeit T, die damit weder die Form der Verteilung noch den statistischen Fehler in Gl.(49) beeinflußt, da dieser nur von der Verteilung selbst abhängt. Eine längere Meßzeit bewirkt vielmehr über $T = N \cdot h$ nur eine Erhöhung der Anzahl N der Spektrallinien in der Abschätzung (darauf wird bei der Besprechung der schnellen Fouriertransformation noch einmal eingegangen). Gleichzeitig erkennt man, daß infolge dieser von T unabhängigen Verteilung ebenfalls kein konsistenter Schätzwert für das Leistungsdichtespektrum gewonnen werden kann.

Mit den Werten für Mittelwert und Streuung einer χ^2_2 -Verteilung mit $n=2$ Freiheitsgraden $E\{\chi^2_2\} = n = 2$ und $E\{[\chi^2_2 - \mu_{\chi^2}]^2\} = 2n = 4$ läßt sich der relative statistische Fehler, der wegen des vernachlässigbaren Verschiebungsfehlers mit dem Gesamtfehler gleichgesetzt werden kann, angeben zu

$$\varepsilon_{\text{GESAMT}} \approx \varepsilon_{\text{STATISTISCH}} = \frac{\sqrt{\text{Var}\{\hat{S}_{yy}\}}}{S_{yy}} = \sqrt{\frac{2}{n}} = 1. \quad (52)$$

Im betrachteten Falle der Bestimmung des Autoleistungsspektrums $\hat{S}_{yy}(\cdot)$ würde sich damit ein relativer Fehler von 100% ergeben. Abhilfe kann auf zweifache Art erreicht werden:

einmal kann ein Ensemble von q unabhängigen Meßfolgen gebildet und eine Mitteilung der q Ergebnisse jeder Frequenzkomponente gemacht werden (Segmentmitteilung),

zum anderen kann eine Mitteilung von l benachbarten Frequenzlinien vorgenommen werden (Frequenzmitteilung);

beide Möglichkeiten reduzieren durch die Erhöhung des Freiheitsgrades n die effektive Streuung. Es sei darauf hingewiesen, daß auf Einhaltung des Abtasttheorems, d.h. hier der statistischen Unabhängigkeit der Abtastwerte x_j der Zeitfunktion x geachtet werden muß. Andernfalls ergeben sich aus den korrelierten Meßwerten stark korrelierte Schätzwerte des Leistungsdichtespektrums, wodurch Segment- und Frequenzmitteilung keine Reduzierung des relativen Fehlers bewirken (Scheinfreiheitsgrad!). Bei den durchgeführten Auswertungen wurde daher sehr viel Wert auf eine sorgfältige Ermittlung von erforderlicher Abtast- und Meßzeit gelegt. Es konnten dabei durch ein flexibles Rechenprogramm stets die optimalen Werte erhalten werden.

I.5.C.2 Schnelle Fouriertransformation

Nachdem die Grundzüge der digitalen Berechnung eines Leistungsdichtespektrums aus abgetasteten Werten einer Zeitfunktion erläutert wurden, soll nun der verwendete Algorithmus besprochen werden.

Die Fast-Fourier-Transformation (FFT) ist eine Berechnungsvorschrift zur Ermittlung von endlichen Fouriertransformationen einer Wertefolge $\{u(t)\}$, die - wie oben gezeigt, Gl.(46), - zur Berechnung einer Abschätzung des Leistungsdichtespektrums verwendet werden können.

Es gilt als Definition

$$U(f, T) = \int_0^T u(t) \cdot e^{-i2\pi f t} dt \quad (53)$$

bzw. in diskreter Form

$$U(p, T) = R \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cdot e^{-2\pi i f_n R i}, \quad (53a)$$

mit $u_n = u(nh)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Die ebenfalls diskreten Frequenzwerte f_k erhält man aus

$$f_k = \frac{R}{T} = \frac{R}{N \cdot R} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

d.h. der Abstand der Spektrallinien beträgt

$$\Delta f = B = \frac{1}{T}.$$

Der FFT-Algorithmus berechnet nun aus der Folge $u_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ die transformierte Folge

$$U_k = \frac{U(p_k, T)}{R} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cdot e^{-\frac{i2\pi R k n}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (54)$$

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Folge von Gl.(54) bei reellen $\{u_n\}$ eine sog. konjugierte Symmetrie $U(f_k) = U^*(f_{N-k})$ besitzt, d.h. daß nur die Werte $k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}$ eindeutig sind. Dies ist im Abtasttheorem begründet, da aus N Zeitwerten nur $\frac{N}{2} + 1$ Transformierte erhalten werden können (Anmerkung: $\frac{N}{2} + 1$, da $f=0$ hinzukommt!)

Als Beispiel sei die Fouriertransformation von acht reellen Werten

$u_0, u_1, \dots, u_7$ betrachtet;

Der FFT-Algorithmus liefert:

k=0	U_0	reell	} Bereich positiver Frequenzen $(\frac{N}{2} + 1)$ Werte
k=1	U_1	komplex	
k=2	U_2	komplex	
k=3	U_3	komplex	
k=4	U_4	reell	

k=5	U_3^*	komplex	} Bereich negativer Frequenzen
k=6	U_2^*	komplex	
k=7	U_1^*	komplex	

Der im Rechenprogramm verwendete COOLEY-TUKEY-Algorithmus, /43/, ist ein Spezialfall des allgemeinen Algorithmus der FFT und besonders auf binäre Digitalrechner zugeschnitten. Er geht (deshalb) von $N=2^P$ Meßdaten aus. Der Anwender muß daher stets dafür sorgen, daß die vorhandene Meßfolge abgeschnitten oder - bei zu wenig Daten - bis zu $N=2^P$ Werten mit Null aufgefüllt wird. Der Einfluß dieser zusätzlichen Nullen auf das Ergebnis läßt sich leicht übersehen: $U(f,T)$ ist in den Frequenzintervallen $\Delta f = \frac{1}{N \cdot h}$ berechnet. Zusätzliche N_z Nullen erhöhen die Anzahl N , und der FFT-Algorithmus liefert Transformierte im Abstand

$$\Delta f' = \frac{1}{(N + N_z) h}.$$

Wie in verschiedenen Veröffentlichungen [/22/, /44/] dargestellt, ist bei der Berechnung des Leistungsdichtespektrums eine zusätzliche Datenaufbereitung nötig, um die durch die endliche Wertefolge verursachten Verfälschungen der transformierten Größen $U(f,T)$ zu reduzieren. (Hierbei erhält nämlich - um bei der analogen Meßvorschrift nach Bild 33 zu bleiben - das Schmalbandfilter eine $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ -Charakteristik mit stark störenden negativen Seitenmaxima). Von den verschiedenen Korrekturvorschlägen /43/ erwies sich bei eigenen Untersuchungen die Methode des sog. "Cosinus-Fenster" als sehr leistungsfähig. Hierbei wird ein "Cosinus-Fenster" entsprechend Bild 34 über die Daten gelegt. Die Wirkung auf das digitale Schmalbandfilter besteht dabei in einer wesentlichen Verkleinerung der schädlichen negativen Seitenmaxima; gleichzeitig wird es etwas breiter.

Datenbewertung

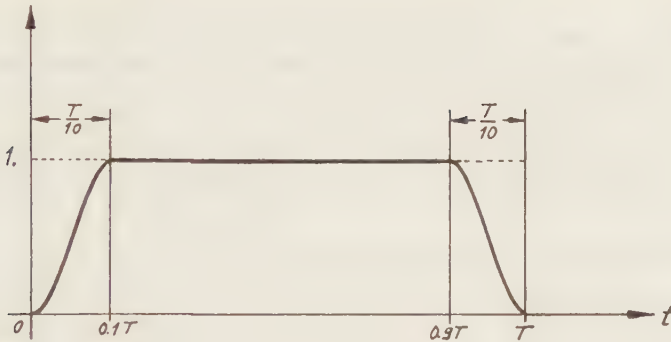


Bild 34 : "Cosinus" - Datenfenster

Das Datenfenster hat die Charakteristik

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{t}{0,1 \cdot T} \right) & \quad \text{für } 0 \leq t \leq 0,1 \cdot T \\ 1 & \quad \text{für } 0,1 \cdot T \leq t \leq 0,9 \cdot T \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{T-t}{0,1 \cdot T} \right) & \quad \text{für } 0,9 \cdot T \leq t \leq T \end{aligned}$$

Da bei dieser Prozedur die Daten verändert, d.h. der Effektivwert der Signale verkleinert wurde, muß nach der FFT-Berechnung eine entsprechende Korrektur erfolgen: dies geschieht durch Division der berechneten Frequenzkomponenten durch den Wert 0,875. Zum Abschluß der Ausführungen über die digitale Berechnung des Leistungsdichtespektrums soll eine Zusammenfassung der praktischen Vorgehensweise erfolgen, wie sie sich - teils in Übereinstimmung mit der Literatur /44/, teils aber auch davon abweichend, /22/ - aufgrund eigener Erfahrungen und Überlegungen ergibt :

1. Wahl der Zahl der Meßdaten zu $N = 2^P$.
2. Falls die gemessene Folge größer ist als $N = 2^P$, so wird sie abgeschnitten und anschließend eine Datenaufbereitung mit dem sog. "Cosinus-Fenster" vorgenommen.

3. Ist die gemessene Folge kleiner als $N = 2^P$, so wird sie zunächst einer Datenaufbereitung mit dem "Cosinus-Fenster" unterzogen und anschließend auf $N = 2^P$ mit Nullen aufgefüllt.
4. Berechnung der $U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cdot e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$, $k=0,1,2,\dots,N-1$ mit dem FFT-Programm /45/, das - aus der Literatur entnommen - für die Rechenanlage EAI 640 geschrieben wurde.

5. Berechnung der groben Schätzwerte entsprechend Gl.(49)

$$\tilde{S}_{uu}(f_k, T) = \frac{2}{N \cdot h} \left| U(f_k, T) \right|^2 = \frac{2 \cdot h}{N} \left| U_k \right|^2, \quad k=0,1,\dots,\frac{N}{2} + 1$$

wobei N die Anzahl der verwendeten, gemessenen Abtastwerte ist (N ggf. $\neq 2^P$).

6. Korrektur der Werte wegen der Datenverformung durch das "Cosinus-Fenster".

Die so erhaltene grobe Schätzung für das Leistungsdichtespektrum besitzt, wie oben Gl.(52) zeigt, einen relativen statistischen Fehler von 100%. Zur Verbesserung der Abschätzung werden nun noch Segment- und Frequenzmittelung vorgenommen. Das aufgestellte Digitalprogramm hat dazu ermittelt, wie viele Zeitsegmente bei der vorliegenden Datenzahl unter Berücksichtigung der nötigen Daten vorgenommen werden können.

7. "Segmentmittelung"

Ausgehend von q verschiedenen, nicht korrelierten Folgen der Länge T wird für jeden der q Datensätze eine grobe Abschätzung $\tilde{S}_{uu}(f_k, T)$ berechnet, die dann gemittelt werden:

$$\hat{S}_{uu}(f_k, T) = \frac{1}{q} \left[\tilde{S}_{uu}(f_k, T)^{(1)} + \tilde{S}_{uu}(f_k, T)^{(2)} + \dots + \tilde{S}_{uu}(f_k, T)^{(q)} \right].$$

$\tilde{S}_{uu}(f_k, T)$ ist wieder näherungsweise χ^2 -verteilt, jedoch mit etwa $2q$ Freiheitsgraden, so daß sich der relative Fehler auf $\varepsilon_r \approx \frac{1}{\sqrt{q}}$ erniedrigt. Es sei erwähnt, daß die Filterform im Vergleich zu Pkt. 5 unverändert, also genähert dreiecksförmig ist, jedoch mit $B_e' = \frac{q}{h}$.

8. "Frequenzmittelung"

Werden l benachbarte, nicht miteinander korrelierte Frequenzkomponenten der oben erhaltenen groben Schätzung gemittelt, so entsteht ein geglättetes Spektrum

$$S_{uu}(f_k, T) = \frac{1}{T} \left[\tilde{S}_{uu}(f_k, T) + \tilde{S}_{uu}(f_{k+1}, T) + \dots + \tilde{S}_{uu}(f_{k+1-1}, T) \right] .$$

Auch dieses Spektrum ist näherungsweise χ^2 -verteilt mit etwa 21 Freiheitsgraden, so daß der relative Fehler auf $\varepsilon_r \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ zurückgeht. Zu beachten ist, daß sich die resultierende Bandbreite im Gegensatz zu Pkt. 7 auf $B_e'' = \frac{1}{h}$ erhöht und dabei durch die Addition der genähert dreieckförmigen Originalfilter nach Pkt.5 sich nun eine nahezu trapezförmige Filtercharakteristik ergibt.

Obwohl beide Verfahren prinzipiell die gleiche Wirkung auf den entstehenden relativen statistischen Fehler haben, unterscheiden sie sich, wie bereits erwähnt, wesentlich in der resultierenden Filtercharakteristik, die einmal genähert dreieckig, zum andern aber trapezförmig ist, /44/ und /22/. Bei den ausgeführten Berechnungen wurden beide Mittelungen kombiniert, so daß näherungsweise $\varepsilon_r \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 9}}$ für den statistischen Fehler gilt.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß im Zusammenhang mit dem statistischen Fehler die Frage der gegenseitigen Korrelation von Meßwerten und Meßfolgen eine entscheidende Bedeutung hat. In Übereinstimmung mit /44/ ergaben eigene Modell- und Originaluntersuchungen, daß die Segmentmittelung wesentlich unempfindlicher gegenüber leicht korrelierten Meßfolgen ist als die entsprechende Frequenzmittelung. Begründet ist dies in der erwähnten Verschiedenheit der resultierenden digitalen Filterformen.

I.5.C.3 Kreuzleistungsdichte, Rückstransformation von Gl.(43)

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Ermittlung des Autoleistungsspektrums aus gemessenen Daten behandelt. Der Übergang zur Berechnung von Kreuzleistungsspektren wie sie Gl.(43) verlangt, ist relativ einfach zu vollziehen. Er soll jedoch aufgezeigt werden, da besonders in /22/ und anderen Literaturstellen z.T. mißverständliche oder falsche Darstellungen wiedergegeben sind.

Ein grober Schätzwert für das Kreuzleistungsspektrum der Signale $x(t)$ und $y(t)$ ist durch Gl.(55) bestimmt:

$$\hat{S}_{xy}(f, T) = \frac{2}{T} \cdot X^*(f, T) \cdot Y(f, T). \quad (55)$$

es gelten die Beziehungen

$$T = N \cdot h; \quad f = f_k = \frac{k}{N \cdot h}; \quad (56)$$

$$X_k = \frac{X(f_k, T)}{h} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{j2\pi k n}{N}};$$

$$Y_k = \frac{Y(f_k, T)}{h} = \sum_{m=0}^{N-1} y_m \cdot e^{-\frac{j2\pi k m}{N}}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

Gl.(55) geht mit Gl.(56) über in Gl.(58):

$$S_{xy}(f_k) = \frac{2h}{N} \cdot X_k^* \cdot Y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (58)$$

Hierbei ist X_k^* die konjugiert komplexe Form von X_k . Zur schnellen, simultanen Berechnung der Fouriertransformierten $\{X_k\}$ und $\{Y_k\}$ der reellen Zahlenfolgen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ werden diese als Real- und Imaginärteil in einen komplexen Datenvektor gespeichert./44/. Man ermittelt dann die Fouriertransformierte dieser komplexen Folge

$$z(n) = x(n) + i \cdot y(n) \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1$$

und erhält allgemein

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - i y(n)] \cdot e^{-\frac{j2\pi k n}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (59)$$

Wie schon früher angemerkt, ist Gl.(59) nur bis $k = \frac{N}{2}$ eindeutig, da sich oberhalb dieser (Nyquist)-Abtastfrequenz $f_k = \frac{1}{2h}$ die Werte wiederholen.

Um nun aus $Z(k)$ der Gl.(59) auf $X(k)$ bzw. $Y(k)$ schließen zu können, benutzt man die Tatsache, daß

$$e^{\frac{j2\pi n(N-k)}{N}} = e^{-\frac{j2\pi n k}{N}}, \quad \text{für ganzzahlige } N, k, n,$$

und bildet zunächst

$$Z(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + i y(n)] e^{\frac{j2\pi k n}{N}}, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

daraus folgt

$$Z^*(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - i y(n)] e^{-\frac{j2\pi k n}{N}}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

so daß schließlich mit G.(59) folgt

$$Z(k) + Z^*(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + i y(n)] e^{-\frac{j2\pi k n}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - i y(n)] e^{-\frac{j2\pi k n}{N}}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-\frac{j2\pi k n}{N}} = 2 \cdot X(k), \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (60)$$

und analog durch Differenzbildung

$$Z(k) - Z^*(N-k) = 2i \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot e^{-\frac{j2\pi k n}{N}} = 2 \cdot i \cdot Y(k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (61)$$

Für $k=0$ ergibt sich aus $Z(0) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + i \cdot y(n)]$

$$X(0) = \operatorname{Re}\{Z(0)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n), \quad Y(0) = \operatorname{Im}\{Z(0)\} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n), \quad (62)$$

während sich für $k = 1, 2, \dots, N$ die Transformatierten ermitteln zu

$$X(k) = \frac{Z(k) + Z^*(N-k)}{2} \quad (63)$$

$$Y(k) = \frac{Z(k) - Z^*(N-k)}{2i}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Mit Gl.(63) läßt sich Gl.(58) ersetzen durch

$$\hat{S}_{xy}(k) = \frac{h}{2Ni} \left\{ |Z(k)|^2 - |Z(N-k)|^2 + Z(k) Z(N-k) - Z^*(k) \cdot Z^*(N-k) \right\}, \quad (64)$$

(für $k = 0$ beachte man Gl.(62)). $k = 1, 2, \dots, N-1$

Entsprechend Gl.(43) kann nun mit Gl.(64) bei bekannten Autoleistungsspektrum $\hat{S}_{xx}(k)$ auf den Frequenzgang des Systems geschlossen werden: einfache Division ($k=0, 1, 2, \dots, N-1$), wobei der Korrekturfaktor (0,875 bei "Cosinus-Fenster") herausfällt, führt zu einer konjugiert symmetrischen Folge, die $F(i\omega)$ in einer Form enthält, die eine sofortige Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe des gleichen FFT-Algorithmus /45/ ermöglicht und die Gewichtsfunktion des analysierten Systems für positive und negative Zeiten liefert. Da der FFT-Algorithmus zunächst nur eine "einseitige Fouriertransformation" vornimmt, soll auf den Übergang von $F(i\omega)$ nach $g(t)$ kurz eingegangen werden:

Zwischen dem Frequenzgang eines Systems und seiner Impulsantwort besteht die Beziehung

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt,$$

mit der Umkehrung

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\text{bzw. } g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{i2\pi ft} df \quad (65)$$

Gl.(65) läßt sich umformen zu

$$g(t) = \int_{-\infty}^0 F(f) \cdot e^{i2\pi ft} df + \int_0^{\infty} F(f) \cdot e^{i2\pi ft} df \quad (66)$$

Mit $F(-f) = F^*(f)$ folgt aus Gl.(66) ausführlich

$$g(t) = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(f)\} \cos 2\pi ft df - 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Im}\{F(f)\} \sin 2\pi ft df \quad (67)$$

Der FFT-Algorithmus berechnet anstelle von Gl.(67) jedoch

$$g(t)_{\text{FFT}} = \int_0^{\infty} [\operatorname{Re}\{F(f)\} + i \operatorname{Im}\{F(f)\}] [\cos 2\pi ft + i \sin 2\pi ft] df$$

oder

$$g(t)_{\text{FFT}} = \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(f)\} \cos 2\pi ft df - \int_0^{\infty} \operatorname{Im}\{F(f)\} \sin 2\pi ft df \quad (68) \\ + i \left\{ \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(f)\} \sin 2\pi ft df + \int_0^{\infty} \operatorname{Im}\{F(f)\} \cos 2\pi ft df \right\}.$$

Der Imaginärteil von Gl.(68) muß sich zu Null ergeben, da $\operatorname{Re}\{F(f)\}$ eine gerade, $\sin 2\pi ft$ eine ungerade bzw. $\operatorname{Im}\{F(f)\}$ eine ungerade, $\cos 2\pi ft$ jedoch eine gerade Funktion ist. Bis auf geringe Rundungsfehler, die sich durch die numerische Berechnung zwangsläufig ergeben, war dies stets erfüllt. Hiermit läßt sich angeben

$$g(t) = 2 \cdot g(t)_{\text{FFT}} \quad ; \quad (69)$$

Die Fouriertransformation Gl.(66) liefert $g(t)$ für den Bereich $-\infty \leq t < \infty$. Der FFT-Algorithmus scheint hier zunächst beschränkt, da er nur die positiven Parameter $n=0,1,2,\dots,N-1$ für die Zeitvariable t kennt. Eine kurze Überlegung ergibt jedoch folgendes:

Der FFT-Algorithmus berechnet Summen der Form

$$\sum_{k=0}^{N-1} F(f_k) e^{i2\pi f_k \tau}$$

Substituiert man f_k durch $-f_k$ sowie τ durch $-\tau$, so ändert sich der Summenausdruck in

$$\sum_{k=0}^{N-1} F(-f_k) e^{i2\pi f_k \tau} = \sum_{k=0}^{N-1} F^*(f_k) e^{i2\pi f_k \tau}$$

womit - bis auf $F^*(f_k)$ - wieder die Form erreicht ist, die der FFT-Algorithmus verwendet: durch den Übergang von $F(f_k)$ zu $F^*(f_k)$ wurde jedoch für die Zeitvariable der negative Wertbereich gewonnen. Die bei dem oben gezeigten Verfahren zur Ermittlung von S_{xy} bzw. S_{xx} und damit auch $F(i\omega)$ sich ergebende konjugierte symmetrische Form der Ergebnisse hat damit zur Folge, daß automatisch auch der negative Zeitbereich für die Impulsantwort bestimmt wird. Bild 35 zeigt als Beispiel eine für ein System zweiter Ordnung berechnete Impulsantwort. (Der negative Zeitbereich, der von $k=N-1$ bis $k=\frac{N}{2}+1$ geht, wurde der besseren Übersicht wegen seitenrichtig eingezeichnet).

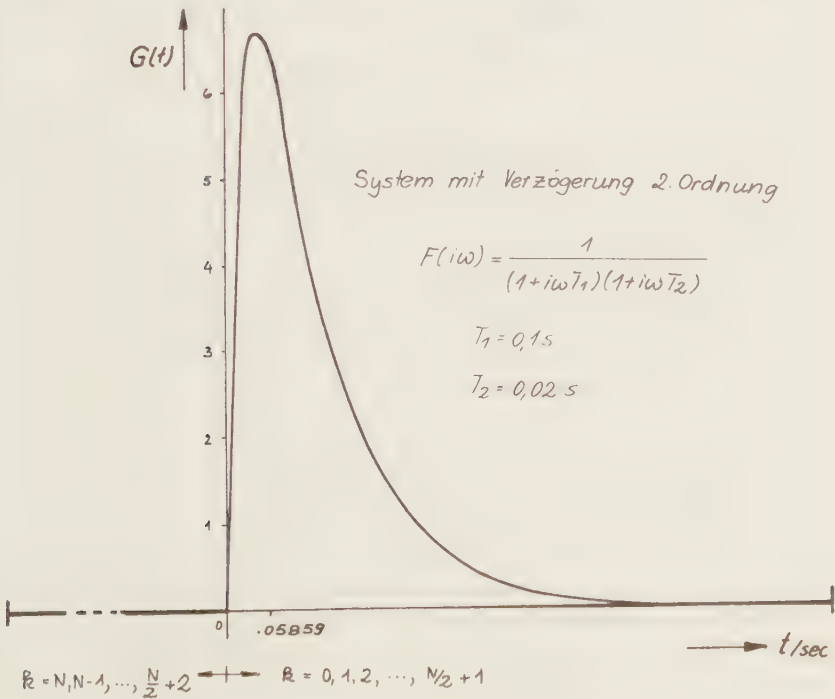


Bild 35 : Beispiel einer mit dem FFT-Algorithmus berechneten Gewichtsfunktion aus gemessenen Daten

Zum Abschluß dieser Ausführungen zur Berechnung des Frequenzganges bzw. der Gewichtsfunktion der gemessenen Signalfolgen seien noch einige Hinweise zum Digitalprogramm angeführt.

1.5.D Anmerkungen zum ausgeführten Digitalprogramm

Die in den vorangegangenen Kapiteln ausführlich geschilderten notwendigen Rechenschritte zur Ermittlung der die Dynamik des Reaktors kennzeichnenden Bodensteinzahl B_0 als Funktion der effektiven Strömungsgeschwindigkeit v wird - wie in Bild 36 dargestellt - von zwei Digitalprogrammen vorgenommen.

Im ersten Programm werden neben Datenaufbereitung und -transfer (Flußdiagramm Bild 25) in einer ersten Datenanalyse im wesentlichen 3 Aufgaben behandelt:

1. Zur Ermittlung von erforderlicher Abtast- und Meßzeit werden die Autoleistungsdichtespektren von Eingangs- und Ausgangssignal berechnet. Bild 37 zeigt ein detailliertes Flußdiagramm, dem man auch entnehmen kann, daß in diesem Programmabschnitt bei entsprechender Steuerung eine Übernahme der eventuell bereits analog ermittelten Kreuzkorrelationsfunktion vom Analogkorrelator "ISAC" möglich ist. Diese Programmabzweigung hat mehr prinzipiellen Charakter und dient nur dazu, einen groben Schätzwert B_0 für eine approximative Bestimmung von $B_0 = B_0(v)$ durch das erwähnte Digitalprogramm (Methode Marquardt) zu bestimmen. Ergebnis der Untersuchung der Autoleistungsdichtespektren sind die beiden Parameter IATZ und NERF.

IATZ gibt an, der wievielte Wert der gespeicherten Folgen zur weiteren Analyse gewählt werden darf, damit die Meßwerte nicht korreliert sind. IATZ=2 bedeutet also, daß doppelt so hoch abgetastet wurde, d.h. nur jeder zweite Meßwert ist erforderlich. Sollte die gewählte Abtastfrequenz zu niedrig gewesen sein - also IATZ < 1 -, so kann - mit Fehlern - weitergerechnet oder aber auch die Datenanalyse abgebrochen werden.

NERF legt die Minimalzahl der Meßwerte pro Auswertelauf fest. Die Fouriertransformation (FOUR2) selbst arbeitet mit der konstanten Datenzahl NGES = 4096. Falls NERF < NGES, d.h. wird die Minimalauflösung nach Gl.(47) erreicht, dann nimmt das Programm automatisch die höhere Auflösung vor (NGES). Der Operateur hat dann später die Möglichkeit, eine Frequenzmittelung entsprechend dem Verhältnis NGES/NERF zur Redu-

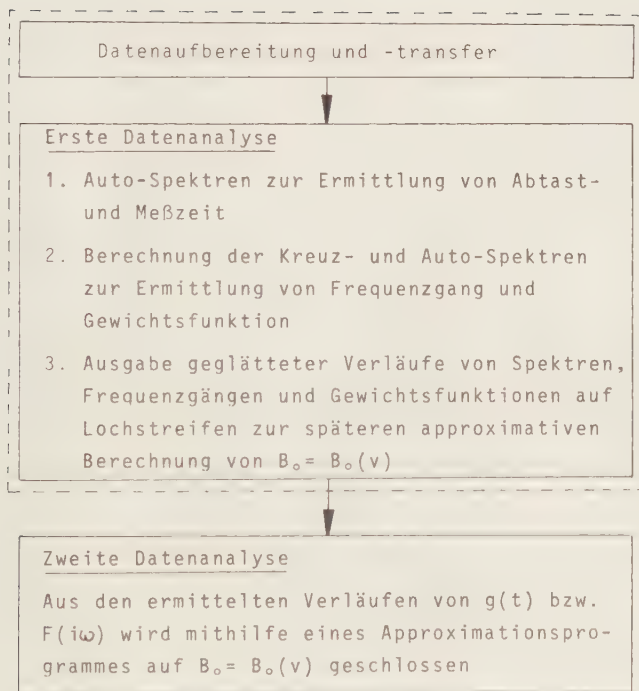
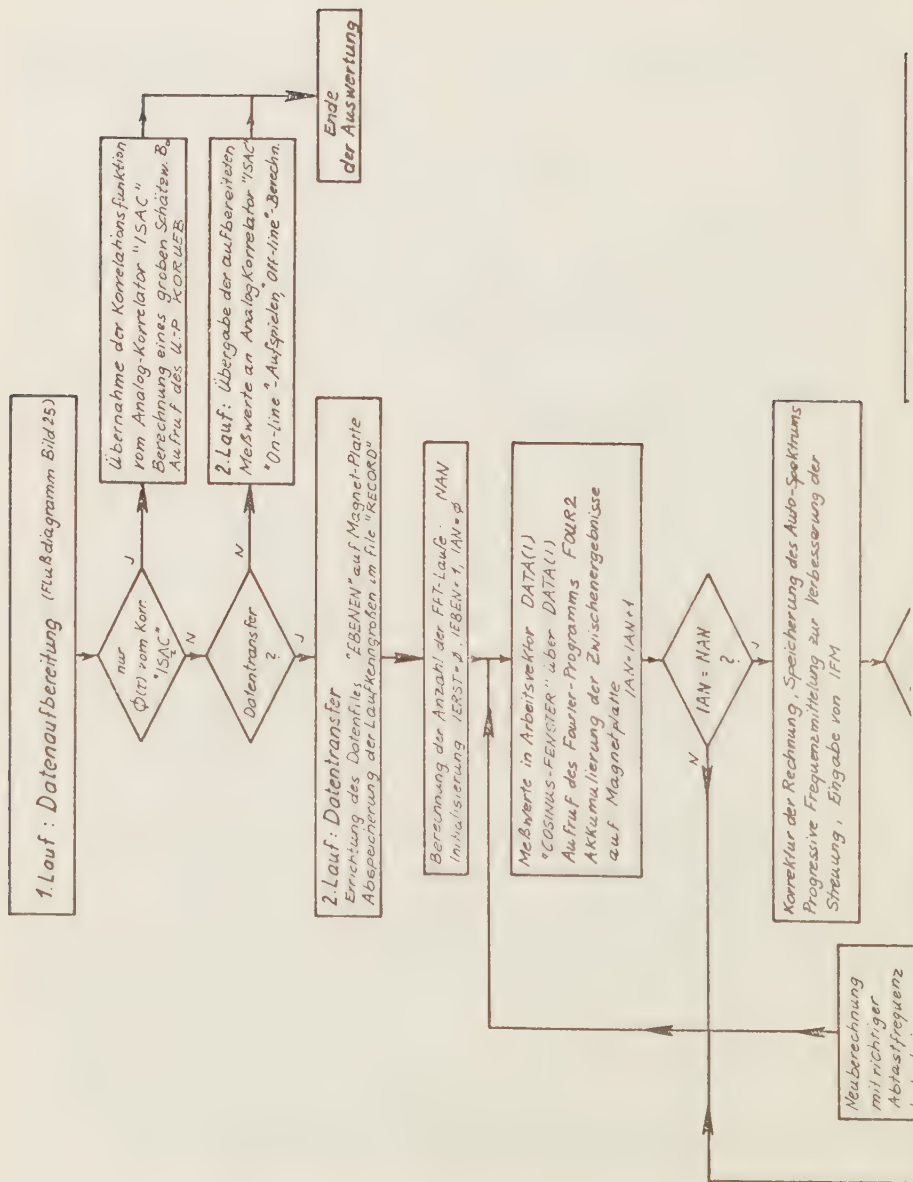


Bild 36 : Aufbau der Digitalprogramme zur Ermittlung von $B_0 = B_0(v)$ aus den gemessenen Eingangs-/Ausgangssignalfolgen



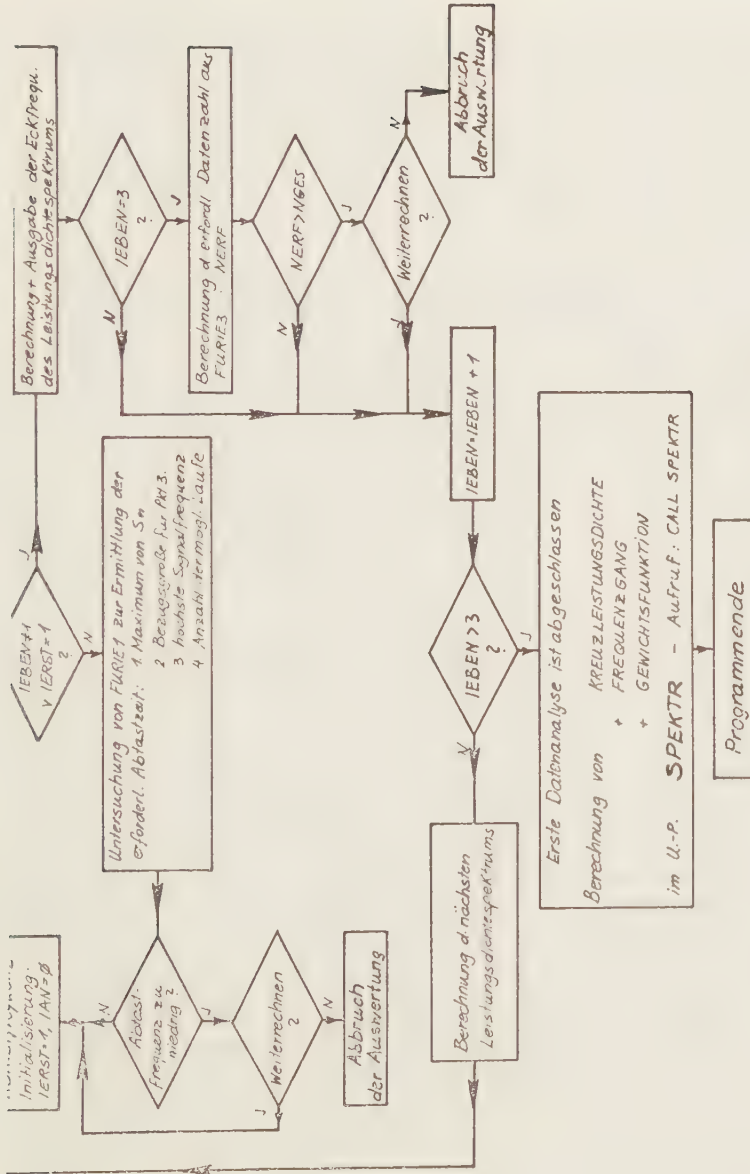


Bild 37 : Flußdiagramm : Erste Datenanalyse

zierung des statistischen Fehlers vorzunehmen (Gl.52). Ist NERF > NGES, so muß entschieden werden, ob - mit ggf. unzureichender Auflösung - weitergerechnet oder die Analyse abgebrochen wird.

Mit IATZ und der bekannten Anzahl N1 der Meßwerte liegt die Anzahl NAN der Segmentmittlungen, d.h. der FFT-Läufe fest, während NGES/NERF angibt, wieviele Frequenzmittlungen mindestens vorgenommen werden können.

2. Durch Aufruf des Unterprogramms SPEKTR, dessen Flußdiagramm Bild 38 zeigt, können unter Berücksichtigung des Parameters IATZ Kreuz- und Autoleistungsdichtespektren und daraus Frequenzgang bzw. Gewichtsfunktion eines Streckenabschnitts ermittelt werden. Mit Hilfe der digitalen Schalter (SENSE-SWITCHES) wird dieses Programm entsprechend gesteuert. Die Ergebnisse, d.h. die geglätteten Verläufe von S_{xx} , S_{xy} , $F(i\omega)$ oder $g(t)$, sind auf der Magnetplatte unter den Namen

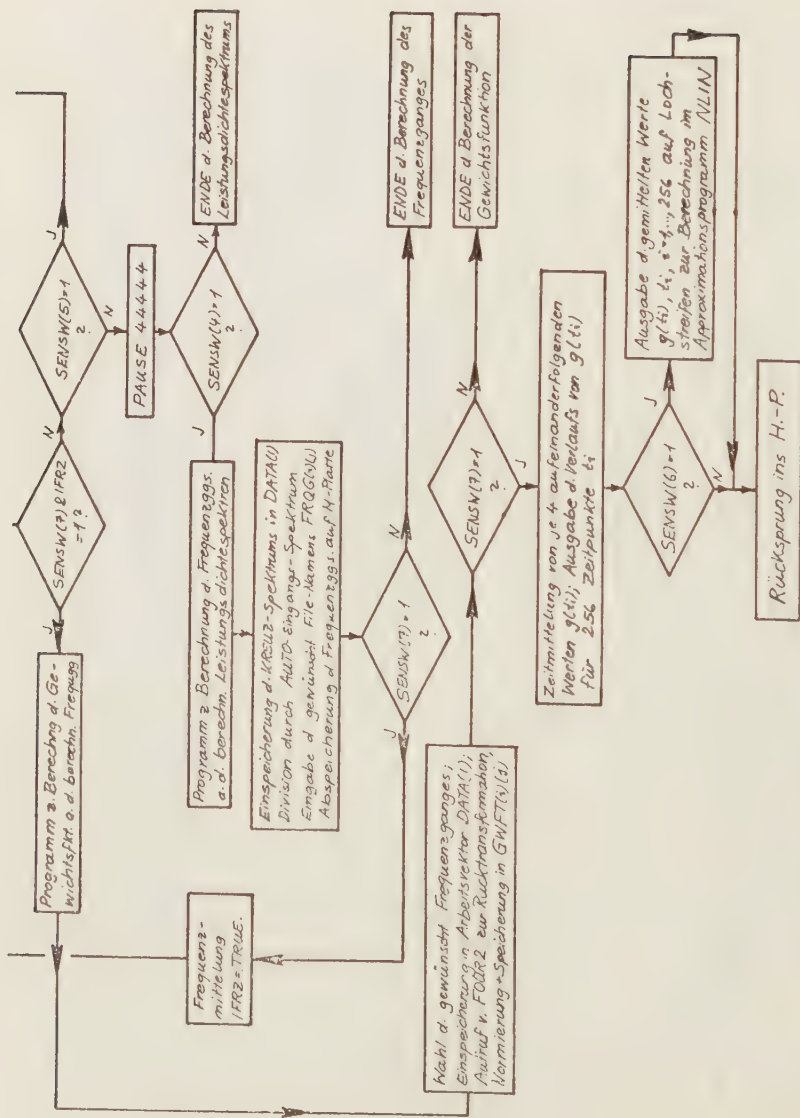
SPTR(iz₁)(iz₂) für ein Leistungsdichtespektrum
Beisp. für Meßstelle 1 u. 2: SPTR12

FRQG (i)(j) für einen Frequenzgang
z.B. FRQG31

und GWFT(i)(j) für eine draus berechnete Gewichtsfunktion
z.B. GWFT31

abgelegt. Gleichzeitig kann eine ausführliche oder gekürzte Liste der berechneten Kurven auf dem Schnelldrucker ausgegeben werden.

3. Nachdem nun die Gewichtsfunktion für einen Streckenabschnitt des Reaktors berechnet, d.h. Gl.(43) numerisch bekannt ist, kann im Vergleich mit der Modellvorstellung - siehe Gl.(28) oder auch Gl.(30) - die Bodensteinzahl mit Hilfe des bereits erwähnten Approximationsprogramms /38/ ermittelt werden. Aus Gründen der größeren Flexibilität und Übersichtlichkeit der Programme erschien es sinnvoll, die Ermittlung der Bodensteinzahl getrennt in einem zweiten Hauptprogramm vorzunehmen. Hierzu wird die Gewichtsfunktion auf Lochstreifen ausgegeben, und zwar in einer Form, die von Approximationsprogramm NLIN verarbeitet werden kann. Das bedeutet u.a., daß von den 1025 Meßwerten die ersten 1000 jeweils paarweise gemittelt werden, da das Unterprogramm NLIN auf 500 Meßwerte beschränkt wurde.



Mod 38 : Flußdiagramm : Unterprogramm "SPEKTR"

Das zweite Programm -"Zeite Datenanalyse" - berechnet nun aus den ermittelten Verläufen von $g(t)$ oder auch $F(i\omega)$ mit Hilfe des Unterprogramms NLIN ausgehend von einem Startwert nach Gl.(40) eine verbesserte Lösung B_0 und gibt dabei gleichzeitig an, welcher Vertrauensbereich vorliegt. (Dies ist ein großer Vorteil im Vergleich zu anderen Programmen dieser Art). Erwähnt werden soll noch, daß zum Unterprogramm NLIN zwei weitere Unterprogramme gehören, die als EXTERNAL deklariert, aufgrund der Modellvorstellung die abhängige Variable selbst (FCODE) sowie deren sämtliche Ableitungen nach den freien Parametern des Modells für die jeweiligen Werte der unabhängigen Variablen berechnen (PCODE). Diese beiden Programme hat der Benutzer zu erstellen. Im übrigen sei auf die ausführliche Beschreibung in /39/ hingewiesen.

I.6 Meßergebnisse und Kritik

Nach den ausführlichen Erläuterungen zur digitalen Ermittlung der Bodensteinzahl können in diesem Abschnitt erhaltene Meßergebnisse in tabellarischer Form angeführt und kurz beurteilt werden. Zum Vergleich sind aus der Literatur angegebene Werte in die Diagramme übernommen worden (Bild 39). Bereits die mit Hilfe der Korrelationsanalyse allein gefundenen Ergebnisse in der Diplomarbeit /15/ zeigten eine deutliche Ortsabhängigkeit der Dispersion innerhalb der Kolonne, auf die damals aufgrund der schwierigen Auswertung von Gl.39 nicht näher eingegangen werden konnte. Eine Analyse durch die oben beschriebene hybride Anordnung bestätigte dies für die zweiphasig durchströmte Kolonne, während sich bei einphasigem Reaktor praktisch keine Unterschiede ergaben. Die nach völlig anderen Test-Methoden unternommenen Versuche in /8/ bestätigen die mit Hilfe der Korrelationsanalyse gewonnenen Ergebnisse. Hierbei wurden auch Wiederholungsversuche angestellt, die jedoch nicht immer gute Reproduzierbarkeit brachten. Die in der vorliegenden Arbeit mit statistischen Signalen beaufschlagten Reaktoren ergaben hingegen bei -stichprobenartig - unter anderen äußeren Versuchsbedingungen unternommenen Messungen nur geringe, nicht signifikante Streuungen der Ergebnisse, so daß aus diesem Grunde und wegen der relativ langen und sorgfältig vorzubereitenden statistischen Analyse auf weitere Kontrollmessungen verzichtet wurde.

	u_{oG}	u_{oF}	B_o	D
Kugel- schüttung	0,00	0,15	23,51	2,61
		0,23	36,82	2,49
		0,30	37,79	3,20
		0,36	40,51	3,60
		0,57	53,19	4,32
Raschigring- schüttung	0,00	0,61	79,32	3,11
		0,91	66,64	5,55
		1,21	67,94	7,26
		1,51	61,82	9,98
	0,61	0,61	54,31	4,76
		0,91	55,96	6,92
		1,21	63,91	8,09
		1,51	63,82	10,13
	0,91	0,61	45,21	5,89
		0,91	56,04	7,12
		1,21	67,88	7,84
		1,51	68,90	9,66
	1,21	0,61	41,34	6,54
		0,91	51,21	7,91
		1,21	63,61	8,49
		1,51	67,32	10,03

Bild 39a : Tabellen der Messungen ; Meßergebnisse

Entsprechend den Ausgangsgleichungen (Gl.3ff.) wurde mit über den ganzen Reaktionsraum konstanten Diffusionskonstanten gearbeitet. Da sich diese Annahme offensichtlich bei der schlankeren Experimentierkolonne II nicht bestätigte, drängen sich zwei Fragen auf:

1. die Annahme des unendlich langen Reaktors ist nicht erfüllt
2. der Reaktor ist tatsächlich bezüglich B_o nicht homogen

d.h. $B_o = B_o(z,v)$ oder $D = D(z,v)$

d.h. als Systemgleichung müßte gelten:
$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \cdot \frac{\partial c}{\partial z} \right).$$

Was Pkt. 1 anbelangt, so zeigten Hybridsimulationen - auf die bereits hingewiesen wurde -, daß entgegen ersten Vermutungen, /9/, Ein- und Auslaufeffekte bei den gegebenen Versuchsaufbauten eine nur geringe Rolle spielen dürften. Damit ist nur der Schluß möglich, daß die Dispersion tatsächlich

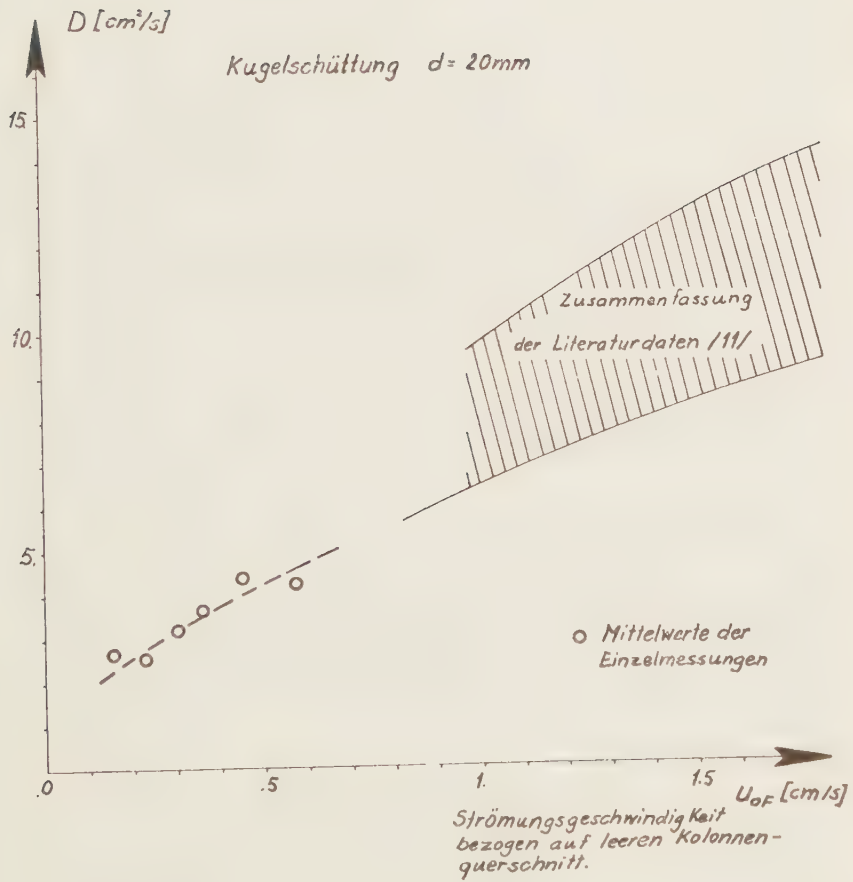


Bild 39b : Verlauf von $D(u_{0F})$ für einphasig durchströmten Reaktor

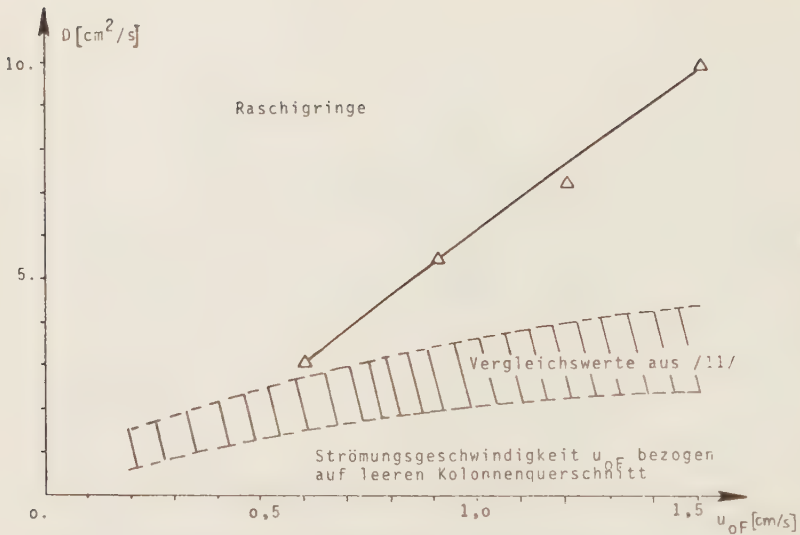


Bild 39c : $D(u_{oF})$ für einphasig durchströmten Reaktor

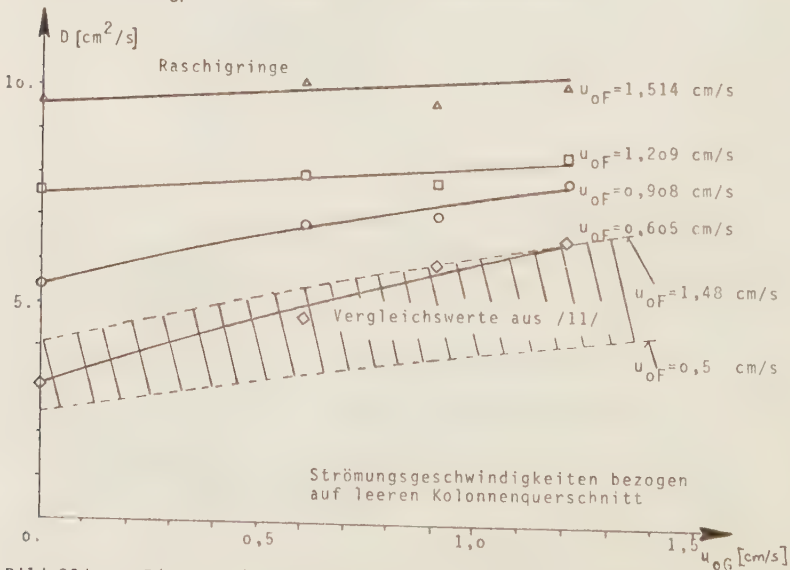


Bild 39d : $D(u_{oG}, u_{oF})$ für zweiphasig durchströmten Reaktor

ortsabhängig ist. Bedenkt man nun, daß die Gasphase entsprechend der oben-gemachten Vereinfachungen im wesentlichen nur zu einer Erhöhung der Turbulenz bzw. der spezifischen Phasengrenzflächen beitragen sollte, dann ergibt sich zwangsläufig, daß sich die blasenförmig verteilte Gasphase beim Passieren des Reaktionsraumes ändern muß. In /46/ ist der relative Gasgehalt einer Blasensäule in Abhängigkeit vom Meßort ermittelt, und es zeigt sich, daß es zu Großblasenbildung und damit zu einer Herabsetzung der Turbulenz bzw. der spezifischen Austauschflächen kommt. Bei der zweiphasig durchströmten Kolonne ergab sich entsprechend für den zweiten Reaktorabschnitt stets ein z.T. beträchtlich geringerer effektiver Diffusionskoeffizient. Da bei den betrachteten Kolonnen jedoch nur 2 Ausgangsmeßstellen vorliegen, erscheint eine genauere Aussage über die Höhenabhängigkeit, die sicherlich auch von der Geometrie und Füllung der Kolonne beeinflußt wird, nicht sinnvoll. Weitere Meßstellen, die die Höhenabhängigkeit ermitteln lassen, können natürlich nicht in beliebig hohem Maße eingeführt werden, da dadurch sowohl der Experimentier- als auch der Analyse-Aufwand beträchtlich ansteigen. Dagegen dürfte mit kleineren Kolonnenabschnitten als bisher unter Zugrundelegung bereichsweise konstanter Dispersion - d.h. bei Gültigkeit von Gl.(3) - schon wesentlich genauere Aussagen möglich sein. Eigene Untersuchungen in dieser Richtung konnten bisher noch nicht angestellt werden.

Eine weitergehende in chemisch-physikalische Zusammenhänge begründete Erklärung der Ortsabhängigkeit der Dispersion der untersuchten Aufstromkolonnen soll und kann in der vorliegenden Arbeit nicht gegeben werden, da hier mehr (meßtechnisch) - systemtheoretisch orientierte Aussagen angestellt wurden; es sei daher auf /46/, /47/ und ähnliche Fachveröffentlichungen hingewiesen.

Teil II : Entwicklung eines diskreten dynamischen Modells:

Maximum-Likelihood-Methode

II.1.A Wahl der Modellvorstellung

Das bisher aufgezeigte Verfahren zur Kennzeichnung der untersuchten Aufstromkolonne orientierte sich an den durch die chemisch-physikalischen Zusammenhänge gegebenen Modellvorstellungen und führte zu einer Beschreibung der Anlage durch eine partielle Differentialgleichung vom Diffusionstyp. Die Lösung dieser Gleichung bzw. die Bestimmung von $D = D(v)$ ließ sich jedoch nicht ohne eine sehr sorgfältige Signalaufbereitung vornehmen, da die gemessenen Eingangs-/Ausgangssignalfolgen nur stark gestört registriert werden konnten. Der Identifikationsprozeß wurde damit zeitaufwendig und konnte nur mit einigen zunächst willkürlich erscheinenden Annahmen über die Struktur der kritischsten Störungen (Kap.I.4.A und Gl.(31) ff.) durchgeführt werden. Die sorgfältige Datenaufbereitung war u.a. auch deshalb notwendig, da sonst bei der Leistungsspektrumanalyse keine reproduzierbaren Ergebnisse erhalten werden. Im engeren Sinne lassen sich nämlich Leistungsdichtespektren von nichtstationären Signalen - wie sie durch Drifterscheinungen erzeugt werden können - nicht angeben. Abgesehen von der komplizierten Analysetechnik erlaubt das im ersten Teil der Arbeit durchgeführte Verfahren i.a. auch keine ON-LINE-Identifizierung, wie sie gerade für laufende Prozesse erforderlich sein kann.

Da auf dem bisher beschrittenen Wege keine wesentliche Verbesserung des Lösungsvorganges erreicht werden kann, erhebt sich die Frage, ob eine ggf. völlig andere Modellvorstellung nicht nur die technische Anlage - regelungstechnisch - zufriedenstellend beschreiben, sondern auch die in dem Reaktor und in den Auswerteeinheiten vorherrschenden kritischen Störungen einfach erfassen kann. Verbunden damit ist die Frage, ob die bisherigen Untersuchungen die eingangs erwähnten Forderungen nach Einfachheit und Praktikabilität erfüllen. Erleichtert wird der Übergang zu einer anderen Modellvorstellung auch dadurch, daß an der untersuchten Strecke insgesamt nur drei Meßstellen waren, und außerdem der kontinuierliche Diffusionsvorgang im Reaktionsraum nicht beeinflußt werden konnte. Dies legt u.a. den Gedanken nahe, das Zeitverhalten des Reaktors durch eine rationale Übertragungsfunktion zu approximieren, d.h. aber den Übergang von der partiellen zur gewöhnlichen Differentialgleichung zu vollziehen.

Für die weiteren Untersuchungen wird daher ein Modell mit folgenden Eigenschaften gewählt:

1. Es sei ein lineares System mit einem Eingang - $u(t)$ - und einem Ausgang - $y(t)$ -. Sein Übertragungsverhalten von $u(t)$ nach $y(t)$ werde durch eine s -Übertragungsfunktion

$F(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$ charakterisiert, wobei Zähler und Nenner die Ordnung n besitzen, und sämtliche Eigenwerte verschieden und in der linken s -Halbebene liegen.

2. Es werde gestört durch ein $N(0,1)$ -Rauschsignal $-e(t)-$, das über

$F_{\text{Stör}} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{e(t)\}}$ auf den Ausgang der Strecke wirke. $F_{\text{Stör}}$ besitzt gleiche Ordnung und Eigenwerte wie $F(s)$. Weiterhin wird zur Berücksichtigung möglicher Nullpunktverschiebungen ersatzweise eine konstante auch auf den Streckenausgang einwirkende Anregung eingeführt.

Bild 41 zeigt das Blockschaltbild der Modellvorstellung.

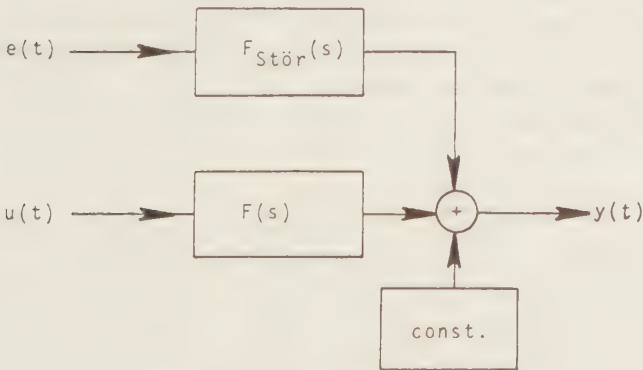


Bild 41 : Blockschaltbild der Modellvorstellung

II.1.B Allgemeines zur Identifizierung eines kontinuierlichen Systems mit Hilfe eines zeitlich diskreten Modells.

Um nun weiterhin numerische Techniken für die Bestimmung der unbekannten Parameter der Übertragungsfunktionen der angenommenen Modellvorstellung anzuwenden, kann die Tatsache der im allgemeinen periodischen Beobachtung der kontinuierlichen Ein-/Ausgangssignale des ebenfalls kontinuierlichen Vorganges im chemischen System in der Modellbildung selbst berücksichtigt werden. Wird das Beobachtungsintervall günstig gewählt, so daß die diskreten Zeitfolgen die kontinuierlichen Zeitverläufe möglichst gut approximieren, dann führt die Beschränkung auf einzelne Abtastwerte bei praktisch vernachlässigbaren Fehlern der Abschätzung zu einer wesentlichen Vereinfachung der Beschreibung des Systems und des Berechnungsaufwandes der unbekannten Systemparameter. Die anzuwendenden Analyseverfahren bedienen sich dabei der Methode der Differenzengleichungen bzw. der z-Transformation - genau wie im Falle der Analyse eines tatsächlich auch diskreten Systems. Im Unterschied zur Problemstellung im Falle eines zeitlich diskreten Systems wird jedoch nicht nach der Lösung des Identifizierungsproblems im z-Bereich, sondern vielmehr nach der das kontinuierliche System kennzeichnenden s-Übertragungsfunktion gefragt. Es ist dabei offensichtlich, daß im Falle abgetasteter Eingangs-/Ausgangssignalfolgen eines kontinuierlichen Systems das daraus bestimmte diskrete Modell im allgemeinen nicht eine exakte Beschreibung des zeitlich kontinuierlichen Systems liefern kann

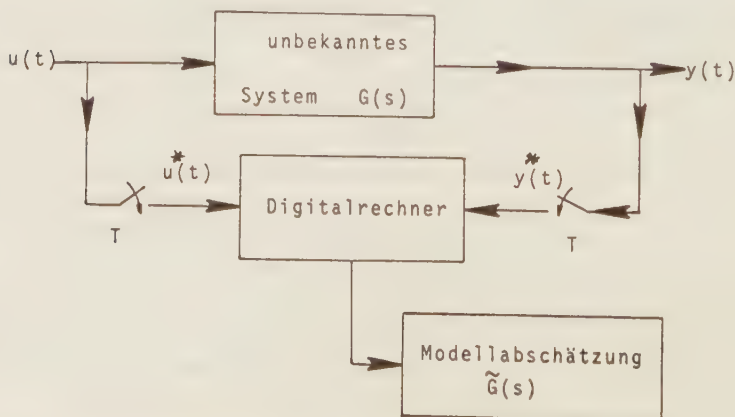
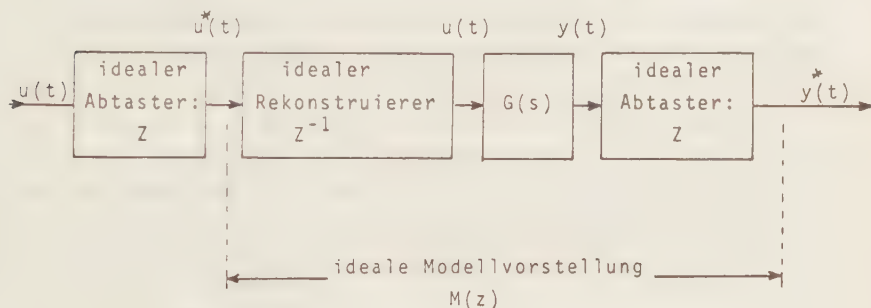


Bild 42 : Diskrete Beobachtung eines kontinuierlichen Systems

(eine endliche Zahl von Abtastwerten kann bekanntlich nie vollständig eine kontinuierliche Funktion - selbst für ein beschränktes Zeitintervall - wiedergeben). Bild 42 zeigt eine mögliche Anordnung, mit der ein kontinuierliches System beobachtet werden kann.

Soll die Meßanordnung zur exakten Übertragungsfunktion $G(s)$ führen, dann müßte im Digitalrechner, der die Modellparameter bestimmen soll, von den Zeitfolgen $\{u^*(t_i)\}$ bzw. $\{y^*(t_i)\}$ auf die jeweiligen kontinuierlichen Verläufe geschlossen werden können. Bild 43 zeigt diese ideale Anordnung im Blockschaltbild.



Z, Z^{-1} : Operatoren

Bild 43 : Ideale Modellvorstellung

Die z-Übertragungsfunktion $M(z)$ der idealen Modellbildung folgt zu

$$M(z) = \frac{Z \{y^*(t_i)\}}{Z \{u^*(t_i)\}} \quad (71)$$

Aus Bild 43 ergibt sich in Operatorenschreibweise für die z-Transformierte der Ausgangsfolge

$$Z \{y^*(t_i)\} = Z \cdot G(s) \cdot Z^{-1} \cdot Z \{u^*(t_i)\} \quad (72)$$

Mit Gleichung (71) und Gl.(72) folgt dann

$$M(z) = Z \cdot G(s) \cdot Z^{-1} \quad (73)$$

Gl.(73) kann natürlich nicht nach $G(s)$ aufgelöst werden, da die für den idealen Abtaster und den idealen Rekonstruierer (= Interpolator) benutzten Operatoren Z bzw. Z^{-1} nicht kommutativ sind, bzw. Z^{-1} überhaupt nicht angegeben werden kann. Ideale Abtaster Z sind auch nur insofern realisierbar, als gewisse Anforderungen bezüglich der Signale $u(t)$ bzw. $y(t)$ wie z.B. bandgebrenztes Spektralangebot usw. erfüllt sind (siehe auch Teil I). Immerhin läßt sich ein derartiges Gebilde wenigstens vom Konzept her fordern. Die realistische Modellanordnung in Bild 44 berücksichtigt diese Überlegungen und zeigt den verwendeten Identifikationsaufbau.

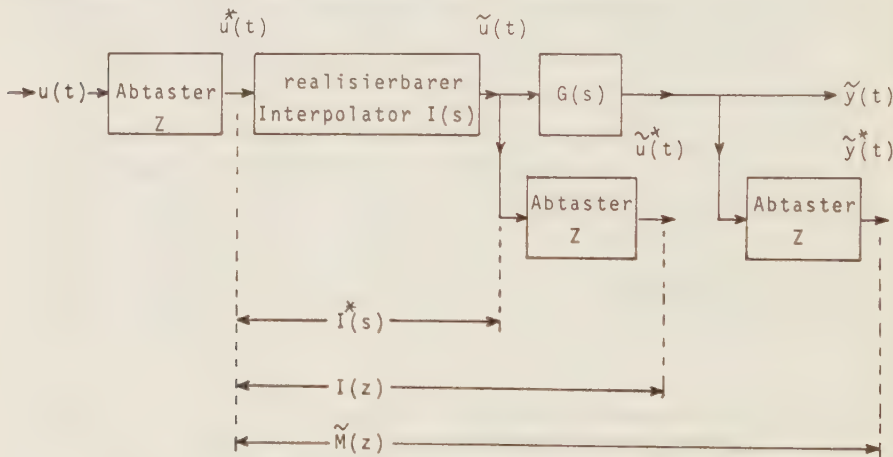


Bild 44 : Realisierbare Identifikationsanordnung für zeitlich kontinuierliche Systeme

Die Auswahl eines geeigneten Interpolators ist ein Problem, das allgemein nur im Zusammenhang mit den Meßwerten (bzw. dem System) und der Abtastfrequenz $f_{ab} = \frac{1}{T}$ gelöst werden kann. Bereits im Teil I wurde die Abtastfrequenz unter Zuhilfenahme des Leistungsdichtespektrums der Daten festgelegt. Da weiterhin nur Signalverläufe gemessen wurden, deren Amplituden

durch statistische Gesetzmäßigkeiten beschrieben wurden, mußte ein Interpolator gewählt werden, der diese Zufallsfolgen möglichst gut wiedergibt. Dabei ist man eben wegen der digitalen Signalverarbeitung - die zudem i.a. noch 'OFF-LINE' erfolgte - nicht auf physikalisch realisierbare Interpolationsvorschriften beschränkt, sondern nur auf solche, die mathematisch ausreichend formelmäßig angegeben werden können (sog. mathematische Realisierbarkeit). Eigene Modelluntersuchungen ergaben in Übereinstimmung mit [51], daß bei den meisten vorkommenden Signalverläufen ein Polygonzug, der die abgetasteten Werte als Stützstellen durch gerade Linien verbindet, zu sehr zufriedenstellenden Ergebnissen d.h. zu nur geringen Interpolationsfehlern führt. Für die Einführung eines Polygon-Interpolators spricht weiterhin die relativ gute mathematische Handlichkeit seiner s-Übertragungsfunktion sowie die Tatsache, daß die untersuchten Systeme stets Systeme mit Verzögerung n -ter Ordnung - $n > 2$ - waren, wodurch die Zulässigkeit der z-Übertragungsfunktion $M(z)$ gewährleistet war. In Bild 45 ist die Funktionsweise des Interpolators kurz angedeutet. Man kann sich die Approximation dabei aus Dreiecken hergestellt denken, deren Spitzen gleich den Ordinatenwerten $r(t_i)$ und deren Basis gleich $2T$ ist. Physikalisch ist nun ein System, dessen Gewichtsfunktion Bild 46 zeigt, nicht realisierbar.

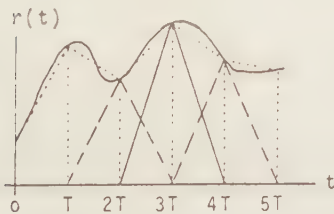


Bild 45: Polygon-Interpolation

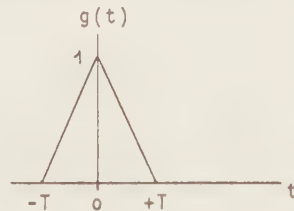


Bild 46: Gewichtsfunktion des Polygon-Interpolators

Mathematisch läßt sich jedoch nach Aufspaltung der dreieckförmigen Gewichtsfunktion in Geradenzüge sehr schnell die Übertragungsfunktion ermitteln:

$$I(s) = \frac{1}{T \cdot s^2} \cdot e^{Ts} - \frac{2}{T \cdot s^2} + \frac{1}{T \cdot s^2} \cdot e^{-T \cdot s} \quad (74)$$

oder

$$I(s) = e^{Ts} \cdot (T \cdot s^2)^{-1} \cdot (1 - e^{-T \cdot s})^2,$$

wobei T die Abtastzeit des idealen Abtasters ist.

Führt man die folgenden Abkürzungen ein,

$$I_1(s) = e^{Ts} \cdot (1 - e^{-Ts})^2 \quad (75a)$$

$$I_2(s) = (T \cdot s^2)^{-1} \quad (75b)$$

dann ergibt sich aus Gl.(73) sinngemäß

$$\tilde{M}(z) = Z \cdot G(s) \cdot I_1(s) \cdot I_2(s), \quad (76)$$

wobei der 'ideale Interpolator' Z^{-1} (dem Wesen nach identisch mit dem Operator der inversen z-Transformation) ersetzt wurde durch die in Bild 44 gezeigte reale Anordnung I(s). Der Z-Operator kann nun auf das Produkt der Terme $G(s) \cdot I_1(s) \cdot I_2(s)$ angewendet werden. Da $I_1(s)$ eine rationale Funktion in $e^{Ts} = z$ ist, folgt aus Gl.(76)

$$\tilde{M}(z) = I_1(z) \cdot Z \cdot G(s) \cdot I_2(s) \quad (76a)$$

oder

$$G(s) = \frac{1}{I_2(s)} \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{\tilde{M}(z)}{I_1(z)} \right\}. \quad (77)$$

Es sei angemerkt, daß $M(z)$ natürlich nur ein Repräsentant von vielen möglichen $\{\tilde{M}(z)\}$ ist, die aufgrund der Approximationen gewonnen werden. Infolgedessen ist auch $G(s)$ nur eine mögliche Realisierung des gesuchten Systems. Aufgrund des a priori-Wissens über die Aufstromkolonne ist davon auszugehen, daß sie als System mit Verzögerung n-ter Ordnung angenähert werden kann. Es ist dabei zu untersuchen, wie groß n sein muß, um eine zufriedenstellende Approximation d.h. ein einfaches, aber dennoch genügend signifikantes Modell zu erhalten.

In /52/ wird - ausgehend von einer anderen Fragestellung - untersucht, welche Eigenschaften ein Interpolator haben muß, damit Gl.(77) wenigstens den richtigen Nenner von $G(s)$ bestimmt. Dabei ergibt sich, daß der - in der

vorliegenden Arbeit aus praktisch - experimentellen Gründen - gewählte Polygon-Interpolator zu richtigen Ergebnissen führt, wenn u.a. nur geringe Störungen angenommen werden können. Dies ist aufgrund der Modellanordnung nach Bild 41 gegeben.

Nachdem dargelegt ist, wie von einem Schätzwert $\tilde{M}(z)$ für ein zeitlich diskretes Modell auf die gewünschte s-Übertragungsfunktion geschlossen werden kann, muß das Identifikationsproblem formuliert werden. Zuvor soll kurz auf die Beschreibung zeitlich diskreter Systeme eingegangen werden.

II.2 Beschreibung zeitlich diskreter Systeme

Ein lineares zeitinvariantes zeitlich diskretes System kann durch eine Differenzengleichung oder die entsprechende z-Übertragungsfunktion beschrieben werden. Ein einfaches diskretes System - auch Abtastsystem genannt - zeigt Bild 47.

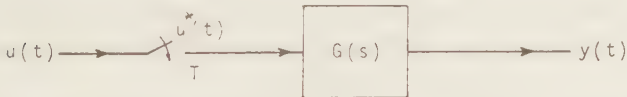


Bild 47 : Blockschaltbild eines einfachen zeitlich diskreten Systems

Es besteht aus einem Abtaster und einem linearen kontinuierlichen Übertragungsglied mit der s-Übertragungsfunktion $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. In Analogie zur kontinuierlichen Systembeschreibung ergibt sich für $y(t)$

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u(mT) \cdot g(t-mT) \quad \forall t \quad (78)$$

$y(t)$ ist damit für alle Werte t definiert. Beschränkt man sich auf eine diskrete Folge von Werten $t_k = kt, k=0,1,2,\dots$, dann ergibt sich

$$y_k = \sum_{m=0}^{\infty} u(mT) \cdot g(kT-mT) \quad (79)$$

Diese Gleichung stellt eine lineare Beziehung zwischen der Eingangsfolge $\{u\}$ und der Ausgangsfolge $\{y\}$ her und heißt Faltungssumme. $\{g_k\}$ ist die Gewichtsfolge in Analogie zur Gewichtsfunktion. Ähnlich wie bei kon-

tinuierlichen Systemen - wo durch die Laplace-Transformation die Berechnung der Faltungsintegrale wesentlich erleichtert wird - vereinfacht auch bei diskreten Systemen eine Transformation - die sog. z-Transformation - die Lösung von Gl.(78). Die z-Transformation der Funktion $u[0, \infty]$ ist die Funktion $U^*(z)$ der komplexen Variablen z , definiert durch

$$U^*(z) = Z\{u\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \cdot z^{-n}, \quad (80)$$

mit $z = e^{sT}$ /53/. Ausgehend von $u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \cdot \delta(t-kT)$

ergibt sich nämlich nach Laplace-Transformation

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \cdot e^{-sTk} \quad \text{und daraus}$$

$$U^*(z) \Big|_{z=e^{sT}} = U^*(s).$$

Die z-Transformierte der Gewichtsfolge $\{g_k\}$ ist

$$G^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \cdot z^{-k} \quad (81)$$

Sie wird z-Übertragungsfunktion genannt. Für das in Bild 46 dargestellte diskrete System ergibt sich im z-Bereich

$$Y^*(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(mT) \cdot z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \cdot z^{-k} = G^*(z) U^*(z)$$

$$G^*(z) = Y^*(z) U^{*-1}(z),$$

bzw.

wobei ein ähnlicher Ausdruck wie bei kontinuierlichen Systemen entsteht.

Falls $G(s)$ eine gebrochene rationale Funktion in s ist, dann ist $G^*(z)$ ebenfalls rational in z ; ein einfacher Pol von $G(s)$ bei $s = -a$ erzeugt einen einfachen Pol in $G^*(z)$ bei $z = e^{-aT}$. Darüberhinaus ergibt sich aus einem Pol der Ordnung k in $G(s)$ bei $s = -a$ ein Pol der Ordnung k bei $z = e^{-aT}$ in $G^*(z)$. Weiterhin läßt sich zeigen, daß, falls $G(s)$ nur Pole in der linken s -Halbebene hat, $G^*(z)$ alle Pole innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ liegen. Es ist anzumerken, daß die Umkehrung dieser Aussagen nicht immer gültig ist.

Eine gleichwertige Darstellung eines diskreten Systems besteht über die Differenzengleichungen. Ein lineares zeitinvariantes diskretes System läßt sich stets in der Form angeben

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \dots + b_n u(k), \quad (83)$$

wobei nicht alle Koeffizienten vorkommen müssen.

Mit dem Verschiebungssatz der z-Transformation

$$Z\{f(k-n)\} = z^{-n} \cdot Z\{f(k)\} \quad (84)$$

folgt aus (83)

$$Y^*(z) = \frac{b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + \dots + b_n}{a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (85)$$

bzw.

$$Y^*(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_n \cdot z^{-n}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_n \cdot z^{-n}} \quad (86)$$

Mit den Gl.n.(83), (84) und (86) ist der Zusammenhang zwischen den gleichwertigen Darstellungen durch Differenzengleichungen einerseits und durch z-Transformierte andererseits gegeben.

II.2.A Formulierung der Systemgleichungen der diskreten Modellvorstellung

Nachdem in Kap.II.1 das im weiteren behandelte Modell charakterisiert ist, sei die Systemgleichung in Form einer Differenzengleichung angegeben:

$$y(t) + \alpha_1 \cdot y(t-1) + \dots + \alpha_n \cdot y(t-n) = \beta_0 \cdot u(t) + \beta_1 \cdot u(t-1) + \dots + \beta_n \cdot u(t-n) + \lambda [e(t) + \delta_1 \cdot e(t-1) + \dots + \delta_n \cdot e(t-n)] + \kappa. \quad (87)$$

$t=1,2,\dots,N$ ist ein Index, der die Meßzeitpunkte beschreibt. $\{e(t)\}$ ist die Folge des normalverteilten Störsignals mit verschwindendem Mittelwert und Streuung 1, das auf den Ausgang des Systems einwirkt. $\{u(t)\}$ und $\{y(t)\}$ sind die gemessenen Eingangs-/Ausgangssignalfolgen; $u(t)$ ist statistisch unabhängig von der Störsignalfolge $e(t)$. Sämtliche Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n, \delta_1, \dots, \delta_n, \lambda$ und κ sind unbekannt und müssen im Identifizierungsprozeß bestimmt werden. Da auch der Anfangszustand des Systems d.h. seine insgesamt n Anfangsbedingungen - im Falle eines System n -ter Ordnung - nicht bekannt sind, besitzt die Modellgleichung Gl.(87) insgesamt $4n + 3$

unbekannte Parameter. Es sei erwähnt, daß Gl.(87) bzw. die Blockschaltbilddarstellung nach Bild 41 unter Berücksichtigung der Linearität des Modells eine sehr allgemeine Systembeschreibung beinhaltet.

Gl.(87) läßt sich zusammengefaßt durch Gl.(88) darstellen:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot y(t-k) = \sum_{k=0}^n \beta_k \cdot u(t-k) + \lambda \cdot \sum_{k=0}^n \gamma_k \cdot e(t-k) + k, \quad (88)$$

mit $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, für $t = 1, 2, \dots, N$.

Es soll nun eine äquivalente Beschreibung des Systems im Zustandsraum, gekennzeichnet durch den Zustandsvektor $\underline{z}(t)$, angegeben werden. Hierzu wird Gl(78) durch die folgenden Gleichungen ersetzt:

$$z_{\mu+1}(t+1) = z_{\mu}(t) + a_{n-\mu} \cdot z_n(t) + b_{n-\mu} \cdot u(t) + c_{n-\mu} \cdot e(t), \quad (89a)$$

für $\mu = 1, 2, \dots, n-1$

$$z_1(t+1) = a_n \cdot z_n(t) + b_n \cdot u(t) + c_n \cdot e(t), \quad (89b)$$

$$y(t) = z_n(t) + b_0 \cdot u(t) + c_0 \cdot e(t) + k, \quad (89c)$$

so daß in Matrix-Schreibweise folgt

$$\underline{z}(t+1) = \underline{A} \cdot \underline{z}(t) + \underline{B} \cdot u(t) + \underline{C} \cdot e(t) \quad (90a)$$

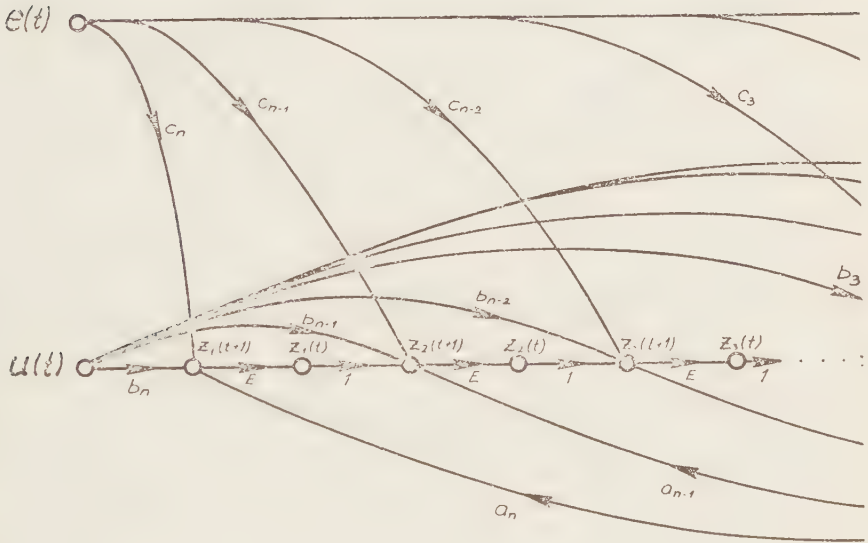
$$y(t) = z_n(t) + b_0 u(t) + c_0 e(t) + k \quad (90b)$$

Die Vektoren bzw. Matrizen haben dann die Form:

$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Bild 48 zeigt das Signalflußdiagramm der Modellvorstellung nach Gl.(90).

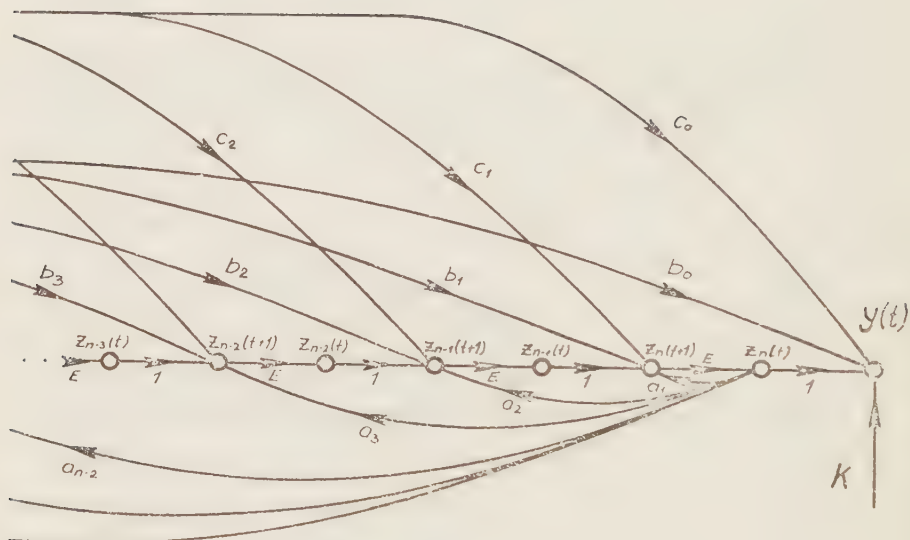


$E \triangleq \text{Einheitsverzögerung}$



$t = 1, 2, \dots, N$

Bild 48: Signalflußdiagramm der Modellvorstellung



Die unbekannten Koeffizienten in A, B und C werden durch einen Vergleich mit der Ausgangsgleichung gewonnen. Hierzu werden die in Gl.(78) vorkommenden Größen

$$y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n), \quad t=1,2,\dots,N$$

mit Hilfe der Transformationsgleichungen Gl.(89) als Funktionen der Zustandsgrößen

$$z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$$

bestimmt. Also im einzelnen:

$$y(t-1) = z_n(t-1) + b_0 \cdot u(t-1) + c_0 \cdot e(t-1) + k ; \text{ mit}$$

$$z_n(t-1) = \frac{1}{a_n} \cdot z_1(t) - \frac{1}{a_n} \cdot (b_n - b_0 \cdot a_n) \cdot u(t-1) - \frac{1}{a_n} \cdot (c_n - c_0 \cdot a_n) \cdot e(t-1) + k.$$

Weiterhin

$$y(t-2) = z_n(t-2) + b_0 \cdot u(t-2) + c_0 \cdot e(t-2) + k ;$$

mit

$$z_n(t-2) = \frac{1}{a_n} \cdot [z_1(t-1) - b_n \cdot u(t-2) - c_n \cdot e(t-2)]$$

bzw.

$$z_1(t-1) = z_2(t) - a_{n-1} \cdot z_n(t-1) - b_{n-1} \cdot u(t-1) - c_{n-1} \cdot e(t-1)$$

und

$$z_n(t-1) = \frac{1}{a_n} \cdot [z_1(t) - b_n \cdot u(t-1) - c_n \cdot e(t-1)]$$

folgt

$$\begin{aligned} y(t-2) &= \frac{1}{a_n} \cdot [z_2(t) - a_{n-1} \cdot z_n(t-1) - b_{n-1} \cdot u(t-1) - c_{n-1} \cdot e(t-1) \\ &\quad - b_n \cdot u(t-2) - c_n \cdot e(t-2) + b_0 \cdot a_n \cdot u(t-2) + c_0 \cdot a_n \cdot e(t-2)] + k \\ &= \frac{1}{a_n} \cdot [z_2(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot z_1(t) - (b_{n-1} - \frac{b_n \cdot a_{n-1}}{a_n}) \cdot u(t-1) \\ &\quad - (a_{n-1} - \frac{c_n \cdot a_{n-1}}{a_n}) \cdot e(t-1) - (b_n - b_0 \cdot a_n) \cdot u(t-2) \\ &\quad - (a_n - c_0 \cdot a_n) \cdot e(t-2)] + k. \end{aligned}$$

Entsprechend folgen dann die weiteren Terme

$$y(t-3), y(t-4), \dots, y(t-n).$$

Einsetzen in Gl.88 und anschließende Entwicklung nach $y(t)$ ermöglicht einen Koeffizientenvergleich mit Gl.89c.

Es entsteht ein Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten von Gl.(90). Wie man dann verifizieren kann, sind diese mit den ursprünglichen über die folgenden Beziehungen verknüpft:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= -\alpha_i \\ b_i &= \beta_i - \alpha_i \cdot \beta_0 \\ c_i &= \lambda (\delta_i - \alpha_i) \\ b_0 &= \beta_0 \\ c_0 &= \lambda \\ k &= \frac{\kappa}{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (91)$$

In den Zustandsgleichungen läßt sich nun noch die Variable $e(t)$ in Abhängigkeit von den beobachteten Signalfolgen $u(t)$ und $y(t)$ angeben:

$$e(t) = \frac{1}{c_0} \{ y(t) - z_n(t) - b_0 \cdot u(t) - k \}$$

und damit

$$\underline{z}(t+1) = \underline{A} \cdot \underline{z}(t) + \underline{B} \cdot u(t) + \underline{C} \cdot \frac{1}{c_0} \{ y(t) - z_n(t) - b_0 \cdot u(t) - k \} \quad (92)$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} \underline{z}(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_n - \alpha_n \\ \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \gamma_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 - \alpha_1 \end{bmatrix} \cdot z_n(t) \\ &+ \begin{bmatrix} \beta_n - \alpha_n \cdot \beta_0 \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \cdot \beta_0 \\ \beta_{n-2} - \alpha_{n-2} \cdot \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_0 \\ \beta_1 - \alpha_1 \cdot \beta_0 \end{bmatrix} u(t) - \beta_0 \begin{bmatrix} \gamma_n - \alpha_n \\ \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \gamma_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 - \alpha_1 \end{bmatrix} u(t) - \kappa \cdot \begin{bmatrix} \gamma_n - \alpha_n \\ \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \gamma_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 - \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_n - \alpha_n \\ \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \gamma_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 - \alpha_1 \end{bmatrix} \cdot y(t) \quad (93) \end{aligned}$$

Zusammengefaßt folgt aus Gl.(93) :

$$\begin{aligned}
 \underline{z}(t+1) = & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\gamma_1 \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix}}_{\underline{z}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_n - \beta_0 \cdot \gamma_n \\ \beta_{n-1} - \beta_0 \cdot \gamma_{n-1} \\ \beta_{n-2} - \beta_0 \cdot \gamma_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_2 - \beta_0 \cdot \gamma_2 \\ \beta_1 - \beta_0 \cdot \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{u}(t) \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_n - \alpha_n \\ \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \gamma_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}}_{\underline{\Delta}} \cdot [\underline{y}(t) - \underline{k}]
 \end{aligned} \tag{94}$$

bzw. in abgekürzter Matrix-Schreibweise

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(t) + \underline{\Gamma} \cdot u(t) + \underline{\Delta} \cdot y(t) - \underline{k} \quad , \tag{95a}$$

$$\underline{\varepsilon}(t) = \lambda \cdot e(t) = y(t) - z_n(t) - b_0 \cdot u(t) - k \quad \text{für } t = 1, 2, \dots, N. \tag{95b}$$

In Gl.(95b) wurde die Variable $\underline{\varepsilon}(t) = \lambda \cdot e(t)$ zur Vereinfachung der Schreibweise eingeführt; sie ist entsprechend $e(t) \sim N(0, \lambda)$ -verteilt, d.h. ihre Verteilungsdichtefunktion lautet

$$p_{\underline{\varepsilon}}(x) = (\lambda \sqrt{2 \cdot \pi})^{-1} \cdot \exp \left[-\frac{x^2}{2\lambda^2} \right] . \tag{96}$$

Bevor die Systemgleichungen (95a) und (95b) gelöst werden, soll auf die Einführung der Anfangsbedingungen näher eingegangen werden.

II.2.B Einführung der Anfangsbedingungen

Für die Lösung des Identifizierungsproblems ist es von Bedeutung, in welcher Form die zum Zeitpunkt der Beobachtung des Systems unbekannten Anfangsbedingungen in die Systemkennzeichnung eingeführt wurden. Ausgehend von

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k y(t-k) = \sum_{k=0}^n \beta_k u(t-k) + \lambda \cdot \sum_{k=0}^n \gamma_k e(t-k) + \kappa, \quad (88)$$

mit $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ und $t = 1, 2, \dots, N$,

findet man nämlich in der Systembeschreibung zunächst folgende noch unbekannte Parameter

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \\ &\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n; \\ &\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \\ &\lambda, \kappa, \end{aligned}$$

d.h. insgesamt $3n+3$ Parameter. Außerdem sind in Gl.(88) - wie bereits erwähnt - noch die n Wertepaare $\{y(t), u(t), t \leq 0\}$ unbekannt.

In welcher Form die unbekannten Anfangszustände ($t \leq 0$) in die Liste der Parameter aufgenommen werden, hängt von der gewählten Systembeschreibung ab. Nimmt man die Differenzengleichung Gl.(88) als Ausgangspunkt, dann lassen sich folgende Gleichungen für die Anfangsbedingungen angeben:

$$y_0(t-n) = - \sum_{k=t}^n \alpha_k \cdot u(t-k) + \sum_{k=t}^n \beta_k \cdot u(t-k) + \lambda \cdot \sum_{k=t}^n \gamma_k \cdot e(t-k), \quad (97)$$

für $t = 1, 2, \dots, n$.

Eine andere - elegantere - Möglichkeit bietet sich mit der Einführung der Matrix-Schreibweise nach Gl.(95) an. Hier ist zu den bereits erwähnten Parametern $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \lambda, \kappa$ noch der Zustandsvektor $\underline{z}(1)$ unbekannt, der den Anfangszustand des Systems vollständig beschreibt.

Da für die weiteren Überlegungen von Gl.(95) ausgegangen wird, seien die gesuchten Systemparameter zur Vereinfachung in einem Parametervektor $\underline{\theta}$ zusammengefaßt. Dieser ergibt sich in Verbindung mit Gl.(94) im einzelnen zu

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= x_i^* \\ \theta_{n+i} &= \beta_i + \beta_0 \cdot x_i^* \\ \theta_{2n+i} &= x_i^* - \alpha_i \\ \theta_{3n+i} &= z_i(1) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (98)$$

$$\theta_{4n+1} = b_0 = \beta_0$$

$$\theta_{4n+2} = K = \frac{1}{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

$$\theta_{4n+3} = \lambda_0 = \lambda$$

II.3. Zur Wahl des Identifizierungsverfahrens

Da die durch Gl.88 formulierte Systembeschreibung als wesentlichen Gleichungsterm die normalverteilten Störsignale $\{e(t)\}$ enthält, scheint es zwingend, auch statistisches Verfahren zur Bestimmung der unbekannten Parameter $\underline{\theta}$ zu wählen. Der Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist dann die ganz allgemeine Frage, wie man überhaupt gesicherte Parameterabschätzungen erhalten kann, wenn gewisse Abtastfolgen vorliegen. Grundlegend für diese Betrachtungen sind Arbeiten von R.Fisher /55/. In /56/ wird auf diese Veröffentlichungen ausführlich eingegangen.

II.3.A Allgemeines zur Schätzung von Parametern

Es werde von gemessenen - in irgendeiner Form registrierten - und damit bekannten Abtastfolgen ausgegangen, deren Verteilungsdichtefunktion bekannt sei und eine bestimmte mathematisch formulierte Gestalt besitze. Über die Systemgleichung Gl.(88) enthält diese jedoch noch eine gewisse Anzahl von unbekannten Parametern, für die Abschätzungen gesucht sind. Zu ihrer Berechnung wird nun davon ausgegangen, daß die besten Werte der unbekannten Parameter diejenigen sind, welche dem erhaltenen Ergebnis die größte Wahrscheinlichkeit verleihen. Ausgehend von der Methode der kleinsten Quadrate

hat R.A.Fisher diesen Grundsatz zum Ausgangspunkt einer allgemeinen Methode gemacht, nach der die Werte irgendwelcher unbekannter Parameter θ_j abgeschätzt werden können, wenn Zahlenwerte beobachtet sind, deren Wahrscheinlichkeitsgesetz von den θ_j abhängt. Es sei z.B. $p(t_1, t_2, \dots | \theta_1, \theta_2, \dots)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß die Größen $x_1, x_2, \dots$ bestimmte Werte $t_1, t_2, \dots$ annehmen. Man setzt dann in $p(t|\underline{\theta})$ für die t_j die gerade beobachteten Werte x_j und nennt die so entstehende Funktion $p(x|\underline{\theta})$, die nur von den θ_j - im vorliegenden Fall also von $\theta_1, \dots, \theta_{4n+3}$ - abhängt, die LIKELIHOOD FUNKTION. Diejenigen Parameterwerte $\underline{\theta}$, welche die LIKELIHOOD FUNKTION zum MAXIMUM machen, d.h. also welche dem beobachteten Ereignis die größte Wahrscheinlichkeit verleihen, heißen plausibelste Werte $\hat{\underline{\theta}}$ der Parameter $\underline{\theta}$. Die Likelihood ist damit als die Wahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte der beobachteten Größen, aber nicht als die Wahrscheinlichkeitsdichte der unbekannten Parameter definiert. Die MAXIMUM LIKELIHOOD METHODE besteht nun darin, daß man die plausibelsten Werte $\hat{\underline{\theta}}$ als Schätzung für die wahren Parameter verwendet.

Die Grundzüge dieser Methode seien kurz am Beispiel eines einzigen unbekannten Parameters $-\alpha-$ erläutert.

Die beobachtete Zufallsvariable $\{x\}$ habe eine kontinuierliche Verteilung mit der Dichtefunktion $p(t|\alpha)$, $\alpha \in A$. Es seien insgesamt N Werte (Repräsentanten, Stichproben) $x_1, x_2, \dots, x_N$ in voneinander unabhängigen Messungen ermittelt. Die $\{x_i\}$, $i=1, 2, \dots, N$ sind dann statistisch unabhängige Variable, die sämtlich die gleiche Verteilungsdichtefunktion $p(t|\alpha)$ haben.

Ihre Verbundverteilung berechnet sich dann zu

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N | \alpha) = p(x_1 | \alpha) \cdot p(x_2 | \alpha) \cdot \dots \cdot p(x_N | \alpha) \quad (99)$$

$L(x_1, x_2, \dots, x_N | \alpha)$ ist die LIKELIHOOD-FUNKTION der Stichproben $x_1, x_2, \dots, x_N$. Nimmt man an, daß die $x_1, x_2, \dots, x_N$ bekannt sind, dann wird klar, daß Gl.99 bzw. $L(\cdot)$ nur eine Funktion von α ist. Das Prinzip der MLM besteht nun darin, einen Schätzwert $\hat{\alpha}$ für den gesuchten wahren Wert α so zu bestimmen, daß die Likelihood-Funktion $L(\cdot)$ so gut als überhaupt möglich erfüllt wird. Dies bedeutet aber, daß $\hat{\alpha}$ im Häufungspunkt aller möglichen Abschätzungen liegen muß. Da $\ln L(\cdot)$ sein Maximum für den gleichen Wert $\alpha_{\max}$ wie $L(\cdot)$ erreicht, geht man zur Bestimmung von nicht von $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$, sondern von

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial \alpha} = 0 \quad (100)$$

aus.

Bei normalverteilten Stichproben wird Gl.(100) - die sog. LIKELIHOOD-GLEICHUNG - besonders einfach. Für diesen Fall - mit der Verteilung $(0, \sigma^2)$ - folgt nämlich aus

$$p(x_i | \alpha) = (\lambda \sqrt{2\pi})^{-1} \cdot \exp \left[-\frac{x_i^2}{2\lambda^2} \right]$$

die Likelihood-Funktion zu

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N | \alpha) = \lambda^{-N} \cdot (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^N \exp \left[-\frac{x_i^2}{2\lambda^2} \right] \quad (101)$$

und damit die Likelihood Gleichung zu

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N | \alpha) = - (2\lambda^2)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - N \cdot \ln \lambda - \frac{N}{2} \cdot \ln 2\pi. \quad (102)$$

In Gl.(102) ist der unbekannte und zu berechnende Parameter α noch implizit in den x_i^2 enthalten. Mit (102) und dem funktionellen Zusammenhang $x_i(\alpha)$ gibt Gl.(100) die Lösungsvorschrift des Parameter-Identifizierungsproblems. An dieser Stelle greifen dann die noch anzugebenden Iterationsmethoden ein. Bezüglich der Konsistenz und des asymptotischen Verhaltens der erhaltenen Lösungen sei hier nochmals auf /56/ hingewiesen.

U.a. wegen des meist nur sehr beschränkten Stichprobenumfanges können Nebenmaxima als Lösungen des entwickelten nichtlinearen Identifizierungsproblems auftreten. Da sich nur in den seltensten Fällen /57/, /58/ Kriterien dafür angeben lassen, wann das absolute Maximum (die wahre Lösung) gefunden ist, wird in der vorliegenden Arbeit von einem mehr pragmatischen Standpunkt ausgegangen: bei der Approximation eines Systems mit örtlich verteilten Parametern durch eine rationale Übertragungsfunktion kann man nicht ein 'wahres System' erhalten, sondern nur eine mehr oder weniger gute Repräsentation. Zudem steht in der vorliegenden Arbeit der Begriff der Praktikabilität bzw. der Einfachheit des Modells im Vordergrund d.h. aber auch, daß der Rechenaufwand und die Rechenzeit zu den Auswahlkriterien gehören. Von entscheidender Bedeutung ist in diesem Zusammenhang deshalb die Frage nach der Ordnung n des Modells nach Gl.(88), die das System mit örtlich verteilten Parametern approximieren soll. Grundsätzlich läßt sich schon jetzt sagen, daß eine gute Näherung sicherlich eine solche mit möglichst hoher Ordnung sein müßte, wenn nicht mit zunehmender Ordnungszahl n der Rechen- und Speicheraufwand überproportional ansteigen sowie die Zuverlässigkeit der Ergebnisse infolge mathematischer Instabilität immer geringer

würde. Es ist daher im folgenden stets zu überprüfen, ob eine hohe Ordnung $n (n > 4)$ des Modells sinnvoll ist.

II.3.B Lösung der Maximum-Likelihood-Gleichung

Es sei nun der Lösungsgang der MLM im einzelnen - unter Berücksichtigung der Modellgleichungen (88) bzw. (95) - erläutert. Wie schon gesagt, ist es dazu nötig, einen Ausdruck für die Verteilungsdichtefunktion der beobachteten Ausgangssignalfolge $\{y(t), t=1,2,\dots,N\}$ als Funktion der Eingangssignale $\{u(t), t=1,2,\dots,N\}$ sowie der insgesamt $4n+3$ unbekannten Parameter - zusammengefaßt im Parametervektor $\underline{\theta}$ - zu bestimmen, /59/. Hierzu kann von Gl.(88) ausgegangen werden, die nun in einer etwas modifizierten Matrix-Schreibweise formuliert wird/62/:

die gemessenen Werte $\{y(t)\}$ und $\{u(t)\}$ sowie Störsignalfolge $\{e(t)\}$, mit $t = 1,2,\dots,N$, seien in den (N) -Vektoren $\underline{y}$, $\underline{u}$ bzw. $\underline{e}$ zusammengefaßt. Die sie verknüpfenden parameterabhängigen Matrizen ermitteln sich nach der folgenden Zwischenrechnung:

Es gilt zunächst ausführlich mit der Vereinbarung für die Anfangsbedingung nach Gl.(97):

$$t = 1 : y(1) = \beta_0 \cdot u(1) + \lambda \cdot e(1) + y_0(1-n) + k ;$$

$$t = 2 : y(2) + \alpha_1 \cdot y(1) = \beta_0 \cdot u(2) + \beta_1 \cdot u(1) + \lambda [e(2) + \delta_1^* \cdot e(1)] + y_0(2-n) + k ;$$

$$\vdots$$

$$t = n-1 : y(n-1) + \alpha_1 \cdot y(n-2) + \dots + \alpha_{n-2} \cdot y(1) = \beta_0 \cdot u(n-1) + \beta_1 \cdot u(n-2) + \dots + \beta_{n-2} \cdot u(1) \\ + \lambda [e(n-1) + \delta_1^* \cdot e(n-2) + \dots + \delta_{n-2}^* \cdot e(1)] \\ + y_0(-1) + k ;$$

$$t = n : y(n) + \alpha_1 \cdot y(n-1) + \dots + \alpha_{n-1} \cdot y(1) = \beta_0 \cdot u(n) + \beta_1 \cdot u(n-1) + \dots + \beta_{n-1} \cdot u(1) \\ + \lambda [e(n) + \delta_1^* \cdot e(n-1) + \dots + \delta_{n-1}^* \cdot e(1)] \\ + y_0(0) + k ;$$

$$t = n+1 : y(n+1) + \alpha_1 \cdot y(n) + \dots + \alpha_n \cdot y(1) = \beta_0 \cdot u(n+1) + \beta_1 \cdot u(n) + \dots + \beta_n \cdot u(1) \\ + \lambda [e(n+1) + \delta_1^* \cdot e(n) + \dots + \delta_n^* \cdot e(1)] + k ;$$

usw. bis $t = N$.

$$\begin{aligned}
 & + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \delta_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \delta_{n-2} & \dots & \delta_1 & 1 & \dots \\ 0 & \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \delta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_2 & \delta_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(n+1) \\ e(n+2) \\ \vdots \\ e(N-1) \\ e(N) \end{bmatrix} + \\
 & \qquad \qquad \qquad \underline{\underline{\mathcal{L}}} \qquad \qquad \qquad \underline{\underline{e}} \\
 & + \begin{bmatrix} y_0(-n+1)+K & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & y_0(-n+2)+K & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & y_0(-n+3)+K & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & y_0(0)+K & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} ; \\
 & \qquad \qquad \qquad \underline{\underline{y}} \qquad \qquad \qquad \underline{\underline{1}}
 \end{aligned}$$

und in Matrixnotation $\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{u}} + \lambda \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}} \cdot \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{y}} \cdot \underline{\underline{1}} . \quad (103)$

Da nun $\underline{\underline{e}} \sim N(0,1)$ -verteilt ist, ist auch $\underline{\underline{y}}$ - bei Kenntnis von $\underline{\underline{u}}$ -normalverteilt. Sein Erwartungswert berechnet sich dann zu

$$E \underline{\underline{y}} = E \{ \underline{\underline{a}}^{-1} [\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{u}} + \lambda \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}} \cdot \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{y}} \cdot \underline{\underline{1}}] \} = \lambda E \{ \underline{\underline{a}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}} \cdot \underline{\underline{e}} \} . \quad (104)$$

Gl.104 liefert den Mittelwert von $\underline{y}$ zu

$$m_y = \lambda \cdot \underline{1} \cdot \underline{e} = \underline{r}. \quad (105)$$

Die Kovarianzfunktion ergibt sich entsprechend zu

$$\begin{aligned} \text{cov}(\underline{y}, \underline{y}) &= E(\underline{y} \underline{y}^T) = E\{\underline{a}^{-1}(\underline{b} \cdot \underline{u} + \lambda \underline{d} \underline{e} + \underline{y}_1) \cdot [\underline{a}^{-1}(\underline{b} \cdot \underline{u} + \lambda \underline{d} \underline{e} + \underline{y}_1)]^T\} \\ &= E\{\underline{a}^{-1}(\dots + \lambda \underline{d} \cdot \underline{e} \dots)(\dots + \lambda \underline{d} \cdot \underline{e} \dots)^T (\underline{a}^{-1})^T\} \\ &= \lambda^2 E\{\underline{a}^{-1} \underline{d} \underline{e} (\underline{d} \underline{e})^T (\underline{a}^{-1})^T\} \\ &= \lambda^2 \underline{a}^{-1} \underline{d} E\{\underline{e} \underline{e}^T\} \underline{d}^T (\underline{a}^{-1})^T. \end{aligned}$$

Mit $E\{\underline{e} \underline{e}^T\} = 1$ folgt also

$$\text{cov}(\underline{y}, \underline{y}) = \lambda^2 \underline{a}^{-1} \underline{d} \underline{d}^T (\underline{a}^{-1})^T.$$

Damit berechnet man das Quadrat der Streuung zu

$$\hat{\sigma}_y^2 = \lambda^2 \underline{a}^{-1} \underline{d} \underline{d}^T (\underline{a}^{-1})^T$$

Mit $|\underline{a}| = |\underline{d}| = 1$ folgt also $\sigma_y^2 = \lambda^2$. (106)

Damit ist $\{y(t)\}$ ebenfalls $N(0, \lambda)$ -verteilt.

Die M.L.-Gleichung folgt daraus zu

$$\ln L = -(2 \cdot \lambda^2)^{-1} \sum_{i=1}^N y_i^2 - N \cdot \ln \lambda - \frac{N}{2} \cdot \ln 2\pi. \quad (107)$$

Den optimalen Schätzwert für $\underline{\theta}$ erhält man aus dem Maximum von Gl.(107), was notwendig das Verschwinden sämtlicher Ableitungen erster Ordnung von $L(\cdot)$ nach den unbekannten Parametern θ_i , $i=1, 2, \dots, 4n+3$ fordert. Formelmäßig bedeutet dies

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{für } i=1, 2, \dots, 4n+3. \quad (108)$$

Da das Maximum der M.L.-Gleichung bezüglich $\{y(t)\}$ -Gl.(107) bzw. Bestimmungsgleichung Gl.(108)- aber gleichzeitig das Minimum der M.L.-Gleichung für $\{\varepsilon(t)\} = \lambda \cdot \{e(t)\}$ - Gl.(95b) - bedeutet, wird als Ausgangspunkt für die weitere Rechnung die M.L.-Gleichung für das Störsignal $\{\varepsilon(t)\}$ verwendet:

$$\ln L = -(2 \lambda^2)^{-1} \cdot \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2 - N \ln \lambda - \frac{N}{2} \ln 2\pi \quad (109)$$

$\{\varepsilon(t)\}$ ist dabei über die zu berechnenden Parameter θ_i -zusammengefaßt im Parametervektor $\underline{\theta}$ - mit den beobachteten Signalfolgen $\{u(t)\}$ und $\{y(t)\}$ durch die Modellgleichungen Gl.(95) verknüpft.

Da $L(\cdot)$ eine kontinuierliche Funktion ist, besitzt die M.L.-Funktion ebenfalls stetige Ableitungen beliebiger Ordnung ($\lambda \neq 0$), d.h. der Gradient dieser Funktion wird im Minimum von Gl.(109) verschwinden, wobei jedoch i.a. nicht notwendigerweise vorausgesetzt werden kann, daß das absolute Minimum gefunden wurde. Zur Lösung des aufgezeigten Problems können verschiedene Iterationsverfahren herangezogen werden. Wegen seiner "schnellen" Konvergenz wird in der vorliegenden Arbeit ein Gradientenverfahren - die Newton-Raphson-Methode- verwendet. Hierzu werden nur die Startwerte (Anfangswerte) sowie die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung der zu iterierenden Funktion, die recht einfach zu erhalten sind, benötigt.

Am Beispiel einer Veränderlichen α sei kurz auf das Verfahren eingegangen.

Es sei

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = f(\alpha) = 0.$$

Mit dem Näherungswert (Startwert) α_i errechnet man einen verbesserten Wert

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)},$$

d.h. im Punkt $[\alpha_i, f(\alpha_i)]$ wurde die Tangente an die Kurve $f(\alpha)$ angelegt und deren Schnittpunkt mit der α -Achse ermittelt. Das Verfahren konvergiert, wenn im gesamten in Frage kommenden Intervall

$$\left| \frac{f \cdot f''}{f'^2} \right| < 1$$

ist.

Da die Konvergenz quadratisch ist, werden sehr schnell gute Näherungswerte erreicht, vorausgesetzt, der Startwert liegt nicht in der Nähe von Punkten, bei denen $f'(\alpha) \approx 0$ oder wo sich zwei Näherungswerte α_1 und α_2 jeweils einander zuordnen. Es muß daher im Laufe eines Berechnungsvorganges ggf. für eine sichere Konvergenz gesorgt werden, indem kurzzeitig auf 'sichere' Verfahren wie REGULA FALSI ausgewichen wird; dies wird im entwickelten Digitalprogramm vorgesehen.

Ausgehend von Gl.(95b) erkennt man, daß die Summe $\frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^N \mathcal{E}^2(t)$ nur von den ersten $4n+2$ Parametern θ_i abhängt. Damit kann die Minimisierung nach dem Parameter $\theta_{4n+3} = \lambda$ getrennt vorgenommen werden. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die Summe $\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \mathcal{E}^2(t)$, die die Bedeutung einer Bewertungssumme besitzt und im folgenden meist als Fehler- oder Verlustfunktion bezeichnet wird, mit dem Symbol $V(\underline{\theta})$ gekennzeichnet. Sie ist damit definiert durch

$$V(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \mathcal{E}(t)^2, \text{ wobei } \theta_i, i=1,2,\dots,4n+2. \quad (110)$$

Daraus folgt für die M.L.-Gleichung

$$\ln L = - (\lambda^2)^{-1} V(\underline{\theta}) - N \cdot \ln \lambda - \frac{N}{2} \ln 2\pi. \quad (111)$$

Wenn der Minimalwert von $V(\underline{\theta})$ gefunden ist, erhält man den $(4n+3)$ -ten Parameter über die Beziehung

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{2}{\lambda_{\min}^3} \cdot V(\underline{\theta})_{\min} - N \cdot \frac{1}{\lambda_{\min}} = 0$$

oder

$$\lambda_{\min}^2 = \frac{2}{N} \cdot V(\underline{\theta})_{\min}. \quad (112)$$

Entsprechend der obigen Darstellung läßt sich für die $\theta_i, i=1,2,\dots,4n+2$, aus

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = - \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial V(\underline{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, i=1,2,\dots,4n+2, \lambda \neq 0, \quad (113)$$

der Newton-Raphson-Algorithmus in der Form

$$\underline{\theta}^{k+1} = \underline{\theta}^k - \frac{V_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}^k)}{V_{\underline{\theta}\underline{\theta}}(\underline{\theta}^k)} \quad (114)$$

angeben. In Gl.(114) sind zur Vereinfachung der Schreibweise als Abkürzungen verwendet:

$\underline{V}_{\theta}(\underline{\theta}) \hat{=}$ Vektor der ersten partiellen Ableitungen von $V(\underline{\theta})$ nach θ_i mit den Elementen

$$\{\underline{V}_{\theta}\}_i = \frac{\partial V(\underline{\theta})}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 4n+2, \quad (115a)$$

$\underline{V}_{\theta\theta}(\underline{\theta}) \hat{=}$ Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von $V(\underline{\theta})$ nach θ_i mit den Elementen

$$\{\underline{V}_{\theta\theta}\}_{ij} = \frac{\partial^2 V(\underline{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 4n+2. \quad (115b)$$

Nachdem durch die Gl.n. (114) bis (115b) die Grundlagen der Rechenvorschriften angegeben sind, müssen die einzelnen Elemente von $\underline{V}_{\theta}$ bzw. $\underline{V}_{\theta\theta}$ in Verbindung mit den Modellgleichungen (95) berechnet werden.

Wegen
$$\frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \sum_{t=1}^N \mathcal{E}(t) \cdot \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial \theta_i} \quad i = 1, 2, \dots, 4n+2 \quad (116)$$

und
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \sum_{t=1}^N \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial \theta_j} + \sum_{t=1}^N \mathcal{E}(t) \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{E}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, 4n+2 \quad (117)$$

läßt sich deren Berechnung auf die Bestimmung der partiellen Ableitungen

1. und 2. Ordnung von $\mathcal{E}(t)$ zurückführen. Mit den Systemgleichungen

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(t) + \underline{\Gamma} \cdot u(t) + \underline{\Delta} [y(t) - \theta_{4n+2}], \quad (95a)$$

$$\mathcal{E}(t) = y(t) - z_n(t) - \theta_{4n+1} \cdot u(t) - \theta_{4n+2}, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (95b)$$

ergeben sich dann bereichsweise - da die verschiedenen Terme nicht von allen θ_i abhängen - die folgenden Beziehungen (der Parameter t ist stets $t = 1, 2, \dots, N$) :

$$\frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial \theta_i} = - \frac{\partial z_n(t)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 4n \quad (118)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial \theta_i} = - u(t), \quad i = 4n+1 \quad (119)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial \theta_i} = -1 - \frac{\partial z_n(t)}{\partial \theta_i}, \quad i = 4n+2 \quad (120)$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen berechnet man

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = - \frac{\partial^2 z_n(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, 4n \quad (121)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 0 \quad i, j = 4n+1, 4n+2. \quad (122)$$

Damit sind die partiellen Ableitungen von $V(\theta)$ auf die der Zustandsvariablen $z_n(t)$ zurückgeführt. Diese Ableitungen wiederum können aus der folgenden Grundbeziehung sowie deren Ableitung ermittelt werden.

$$\frac{\partial z(t+1)}{\partial \theta_i} = \Phi \cdot \frac{\partial z(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \cdot z(t) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i} u(t) + \frac{\partial \Delta}{\partial \theta_i} [y(t) - \theta_{4n+2}], \quad (123)$$

für $i = 1, 2, \dots, 4n$.

Dabei ist wegen der besonderen Struktur von Φ für die Berechnung der Ableitungen von $z_n(t)$ die Berechnung sämtlicher Zustandsgrößen $z_i(t)$ bzw. deren Ableitungen nötig. Im folgenden wird daher die Matrixschreibweise verwendet.

II.3.B.1 Bestimmung der partiellen Ableitungen erster Ordnung von $z(t)$

$i = 1, 2, \dots, n$: Matrix-Differenzengleichung aus Gl.123

$$\frac{\partial z(t+1)}{\partial \theta_i} = \Phi \cdot \frac{\partial z(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \cdot z(t) ; \quad \frac{\partial z(t)}{\partial \theta_i} = 0 \quad (124)$$

Hierbei hat $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}$ nach Gl. 94 die Form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma_{n1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma_{(n-1)i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma_{1i} \end{bmatrix}$$

woraus das Produkt $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \cdot z(t)$ in der Form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \cdot z(t) = \begin{bmatrix} -\sigma_{n1} \\ \vdots \\ -\sigma_{2i} \\ -\sigma_{1i} \end{bmatrix} \cdot z_n(t)$$

folgt.

$i = n+1, n+2, \dots, 2n$: Matrix-Differenzengleichung aus Gl.123

$$\frac{\partial \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i} = \underline{\Phi} \cdot \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \underline{\Gamma}}{\partial \theta_i} \cdot u(t) ; \quad \frac{\partial \underline{z}(1)}{\partial \theta_i} = \underline{0} . \quad (125)$$

Hierbei hat der Vektor $\frac{\partial \underline{\Gamma}}{\partial \theta_i}$

nach Gl.94 die Form

$$\frac{\partial \underline{\Gamma}}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \delta_{2n,i} \\ \delta_{(2n-1),i} \\ \vdots \\ \delta_{(n+2),i} \\ \delta_{(n+1),i} \end{bmatrix} .$$

$i = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n$: Matrix-Differenzengleichung aus Gl.123

$$\frac{\partial \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i} = \underline{\Phi} \cdot \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \underline{\Delta}}{\partial \theta_i} [y(t) - \theta_{4n+2}] ; \quad \frac{\partial \underline{z}(1)}{\partial \theta_i} = \underline{0} . \quad (126)$$

Hierbei hat der Vektor $\frac{\partial \underline{\Delta}}{\partial \theta_i}$

nach Gl.124 die Form

$$\frac{\partial \underline{\Delta}}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \delta_{3n,i} \\ \delta_{(3n-1),i} \\ \vdots \\ \delta_{(2n+1),i} \end{bmatrix} .$$

$i = 3n+1, 3n+2, \dots, 4n$: Matrix-Differenzengleichung aus Gl.123

$$\frac{\partial \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i} = \underline{\Phi} \cdot \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_i} ; \quad \frac{\partial \underline{z}(1)}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \delta_{(3n+1),i} \\ \delta_{(3n+2),i} \\ \vdots \\ \delta_{4n,i} \end{bmatrix} .$$

$i = 4n+2$:

Matrix-Differenzengleichung aus Gl. 123

$$\frac{\partial \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_{4n+2}} = \underline{\Phi} \cdot \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_{4n+2}} - \underline{\Delta} ; \quad \frac{\partial \underline{z}(1)}{\partial \theta_{4n+2}} = \underline{0} .$$

Zum Abschluß der Berechnung der ersten Ableitungen seien Flußdiagramme zu deren Bestimmung angefügt. Erwähnt werden sollen zuvor noch einmal die Anfangsbedingungen der Matrix-Differenzengleichungen:

$$\frac{\partial \underline{z}(1)}{\partial \theta_i} = \underline{0} , \quad i = 1, 2, \dots, 3n$$

$$\frac{\partial z_i(1)}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} , \quad i, j = 3n+1, \dots, 4n ,$$

wobei für δ_{ij} jeweils die Kronecker-Vereinbarung gilt. Bild 49 zeigt die Berechnung von $V(\underline{\theta})$ sowie sämtlicher ersten Ableitungen $\frac{\partial V(\underline{\theta})}{\partial \theta_i}$, $i = 1, 2, \dots, 4n+2$. Für die Ermittlung von $\underline{z}(t)$ ist nach Gl. 95b $\underline{z}_n(t)$ nötig. Dieser Term ergibt sich aus der Vektor-Differenzengleichung (95a) für $k = \theta_{4n+2}$:

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(t) + \underline{\Gamma} u(t) + \underline{\Delta} [y(t) - \theta_{4n+2}] \quad t=1, 2, \dots, N \quad (95a)$$

mit

$$\underline{z}(1) = \begin{bmatrix} \theta_{3n+1} \\ \vdots \\ \theta_{4n} \end{bmatrix}$$

II.3.B.2 Bestimmung der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\underline{z}(t)$

Zur Berechnung der zweiten Ableitungen der Fehlerfunktion V - zusammengefaßt in die Ableitungsmatrix $V_{\theta\theta}$, Gl.115b - wird von Gl.123 ausgegangen. Nochmalige Differentiationen liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left\{ \frac{\partial \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i} \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left\{ \underline{\Phi} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \theta_j} \underline{z}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\Gamma}}{\partial \theta_j} u(t) + \frac{\partial \underline{\Delta}}{\partial \theta_j} [y(t) - \theta_{4n+2}] \right\}, i, j=1, 2, \dots, 4n \end{aligned} \quad (127)$$

Gl.127 kann für die einzelnen θ_i , $i = 1, 2, \dots, 4n$ weiter bestimmt werden:

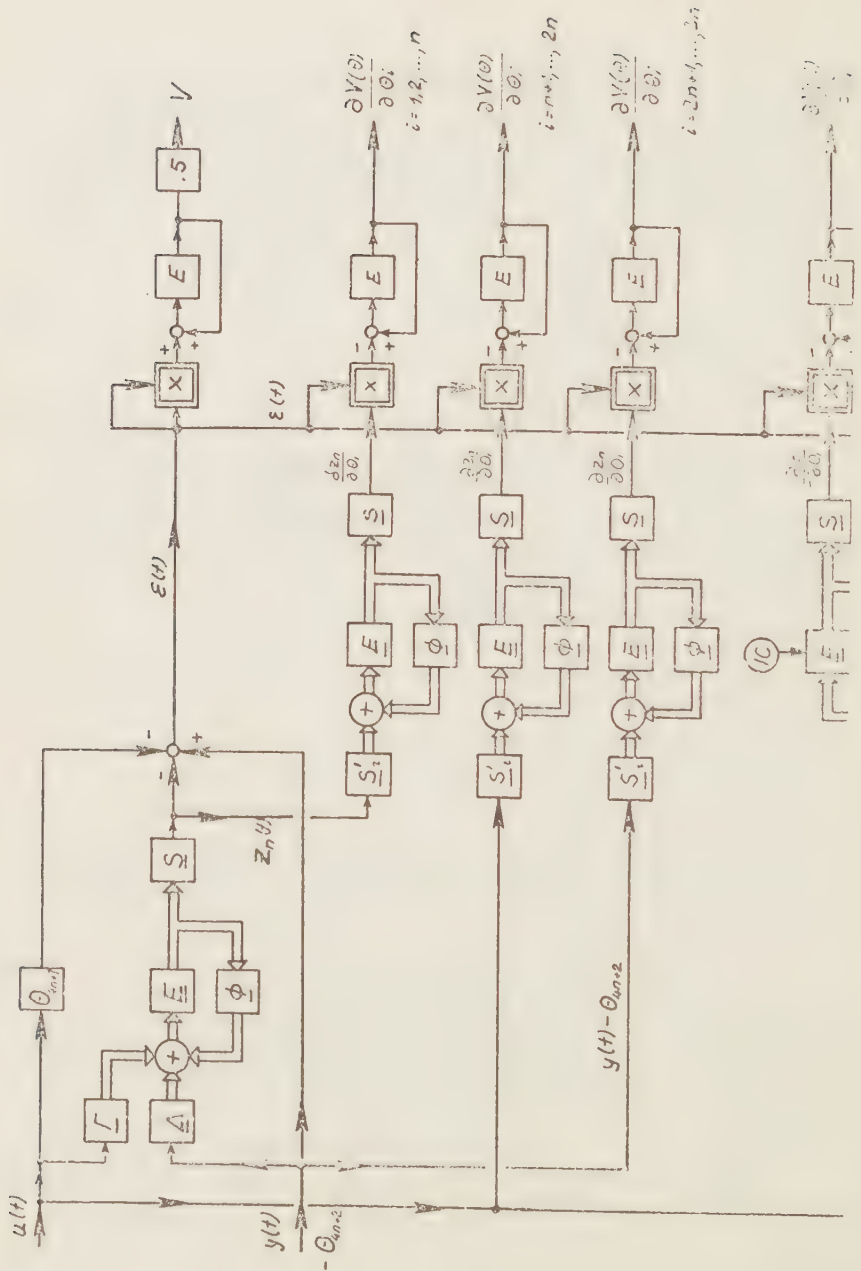
$i, j = 1, 2, \dots, n$:
es gilt zunächst

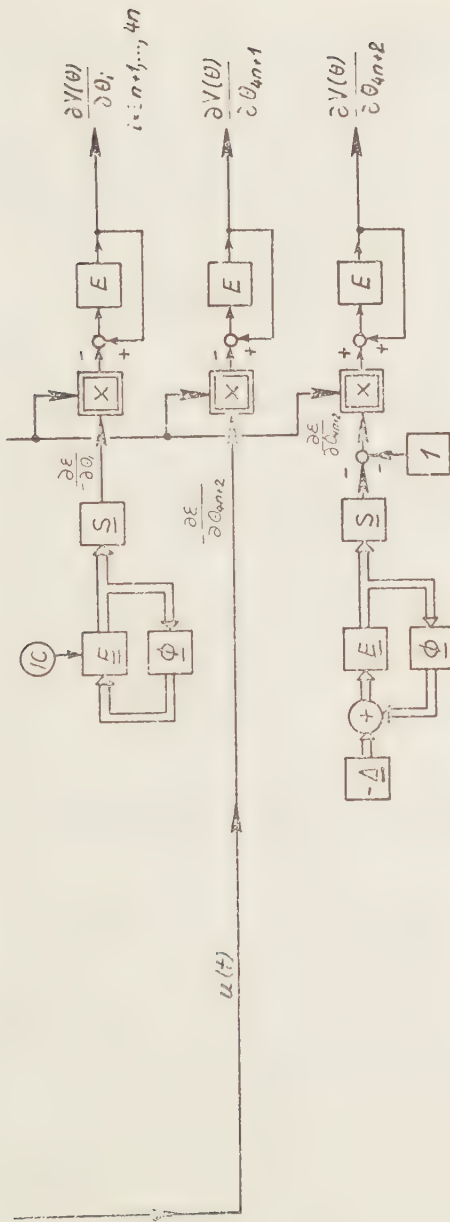
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_i} + \underline{\Phi} \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot \underline{z}(t) \\ &\quad + \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial^2 \underline{\Gamma}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot u(t) + \frac{\partial^2 \underline{\Delta}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} [y(t) - \theta_{4n+2}] \quad ; \end{aligned} \quad (128)$$

da $\frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial^2 \underline{\Gamma}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial^2 \underline{\Delta}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 0$, für $i, j = 1, 2, \dots, n$,

folgt

$$\frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \underline{\Phi} \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \theta_j} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_j} \quad , \quad (129)$$





zusätzl. Vereinbarungen : E bzw. $E \dots$ Einheitsverzögerung
 $\underline{S} \dots [000 \dots 01]$
 $\underline{S}'_i \dots \begin{bmatrix} \delta_{ni} \\ \delta_{(n-1)i} \\ \vdots \\ \delta_{1i} \end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix} \delta_{3ni} \\ \delta_{(3n-1)i} \\ \vdots \\ \delta_{(1n)i} \end{bmatrix}$
 alle Anfangsbedingungen sind Null, wenn nicht besonders angegeben.
 (für die Bereiche $i = 1, 2, \dots, n$ bzw. $i = n+1, n+2, \dots, 2n$ bzw. $i = 2n+1, \dots, 3n$)

Bild 49 : Blockschaltdiagramm zur Berechnung der ersten Ableitungen V_0 sowie von V

mit der Anfangsbedingung

$$\frac{\partial^2 \underline{z}(1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 0 \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

$$i=1, 2, \dots, n; \quad j=n+1, n+2, \dots, 4n:$$

$$\frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_j} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial^2 \underline{z}(1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 0 \quad (130)$$

Ausgehend von Gl.128 folgt für

$$i, j= n+1, n+2, \dots, 4n \quad \frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} ; \quad \frac{\partial^2 \underline{z}(1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 0 ,$$

so daß sämtliche zweiten Ableitungen identisch Null sind. Es bleibt noch die Bestimmung der zweiten Ableitungen für die Bereiche $i=1, 2, \dots, 4n$; $j=4n+1, 4n+2$.

$$i=1, 2, \dots, 4n, \quad j=4n+1:$$

Gl.(123) enthält den Parameter θ_{4n+1} nicht mehr, daher ist

$$\frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 0 .$$

$$i=1, 2, \dots, n; \quad j=4n+2:$$

Aus Gl.123 folgt

$$\frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_{4n+2}} = \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_{4n+2}} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_{4n+2}} ; \quad \frac{\partial^2 \underline{z}(1)}{\partial \theta_i \partial \theta_{4n+2}} = 0 \quad (131)$$

Für $i=n+1, n+2, \dots, 2n$ und $j=4n+2$ bzw. $i=3n+1, 3n+2, \dots, 4n$ ergibt sich eine homogene Vektor-Differenzengleichung mit verschwindenden Anfangsbedingungen, so daß

$$\frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_{4n+2}} = 0 .$$

$$i=2n+1, 2n+2, \dots, 3n; \quad j=4n+2:$$

Aus Gl.123 folgt

$$\frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_{4n+2}} = \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_{4n+2}} - \frac{\partial \Delta}{\partial \theta_i} \quad (132)$$

mit

$$\frac{\partial^2 \underline{z}(1)}{\partial \theta_i \partial \theta_{4n+2}} = 0 .$$

Nachdem so sämtliche Ableitungen zweiter Ordnung von $\underline{z}$ bekannt sind und damit auch die Matrix $\underline{V}_{00}$ bestimmt ist, seien noch die Blockschaltbilder der prinzipiellen Berechnung angegeben (Bild 50). Danach ist zu diskutieren, in welcher Form die numerische Lösung vollzogen werden soll; dabei wird es sich zeigen, daß nur einige wenige Ableitungen berechnet werden müssen. Zuvor sei kurz noch auf die Lösung von linearen inhomogenen Vektor-Differenzgleichungen eingegangen.

II.3.8.3 Lösung linearer inhomogener Vektor-Differenzgleichungen

Es sei von

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(t) \quad , \quad t = 1, 2, \dots, N$$

ausgegangen, /60/. Der Anfangsvektor ist $\underline{z}(1) = \underline{z}_0$. In der einschlägigen Literatur wird gezeigt, daß die Gleichungen ähnlich wie eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten n linear unabhängige Lösungen besitzt, die ein Fundamentalsystem bilden, /61/. Faßt man diese Lösungen in der Fundamentalmatrix $\underline{\Psi}(t)$ zusammen, dann gilt

$$\underline{\Psi}(t+1) = \underline{\Phi} \cdot \underline{\Psi}(t) \quad , \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

wobei dann die folgenden Rekursionsbeziehungen folgen

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(1) &= \underline{I} \\ \underline{\Psi}(2) &= \underline{\Phi} \\ \underline{\Psi}(3) &= \underline{\Phi} \cdot \underline{\Phi} \\ &\vdots \\ \underline{\Psi}(N) &= \underline{\Phi}^{N-1} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Lösung der homogenen Gleichung

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi}^{t-1} \cdot \underline{z}_0 \quad , \quad t > 1.$$

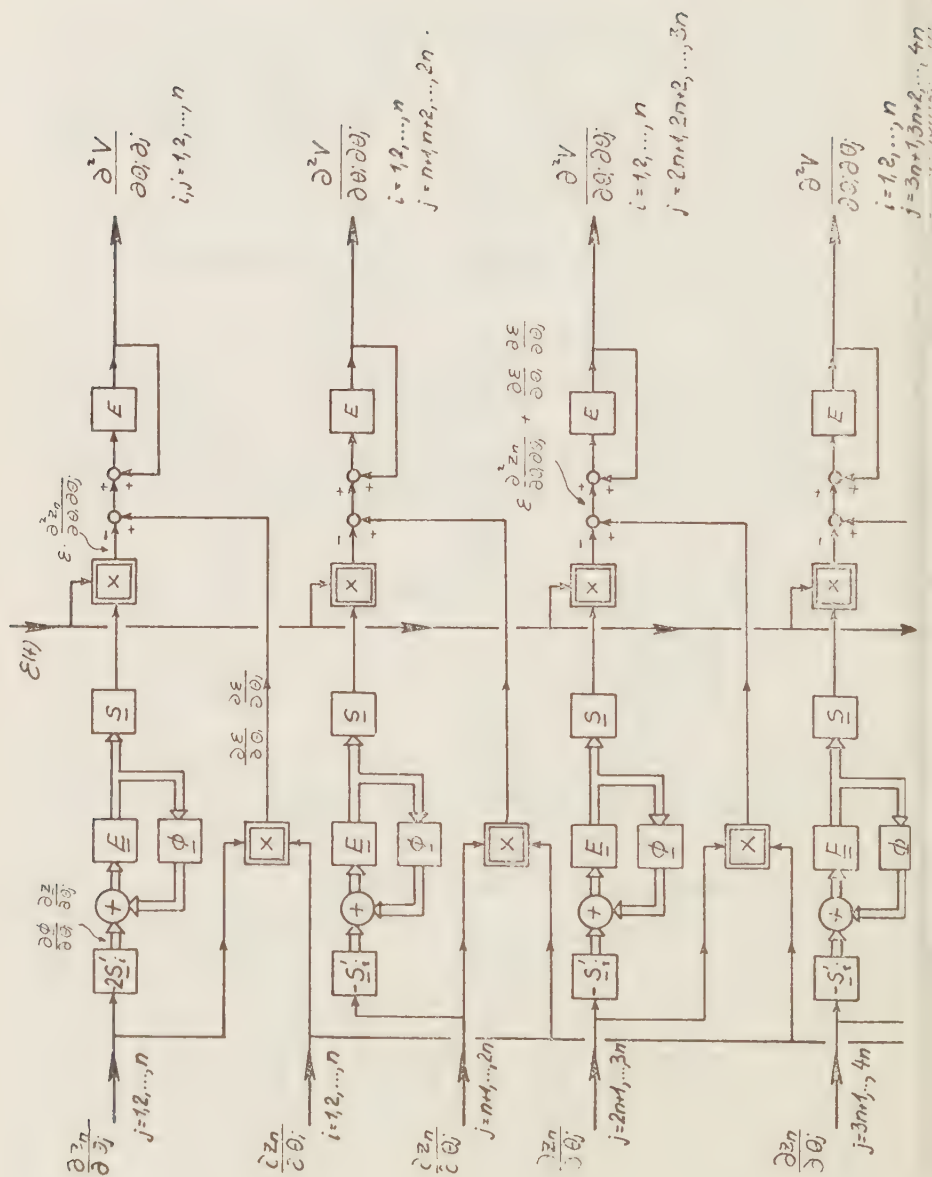
Für die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(t) + \underline{\Gamma} \cdot \underline{v}(t) \quad , \quad t = 1, 2, \dots, N$$

mit $\underline{z}(1) = \underline{z}_0$

folgt rekursiv

$$\begin{aligned} \underline{z}(2) &= \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(1) + \underline{\Gamma} \cdot \underline{v}(1) \\ \underline{z}(3) &= \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(2) + \underline{\Gamma} \cdot \underline{v}(2) = \underline{\Phi} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(1) + \underline{\Phi} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \underline{v}(1) + \underline{\Gamma} \cdot \underline{v}(2) \end{aligned}$$



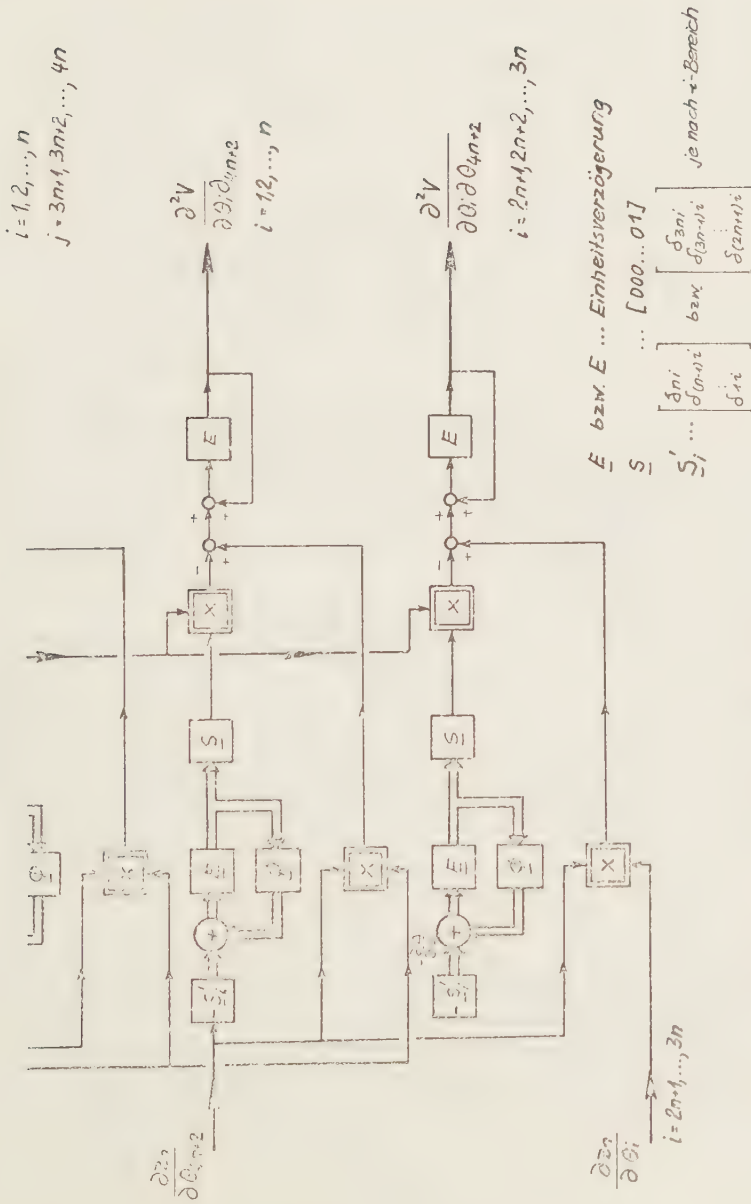


Bild 50 : Blockschalbild zur Berechnung von V_{00}

Daraus läßt sich induktiv schließen

$$\underline{z}(t) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{z}_0 + \sum_{\ell=1}^t \underline{\Phi}(t-\ell) \cdot \underline{\Gamma} \cdot \underline{v}(\ell) \quad , \quad t > 0 ;$$

und weiter

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi}^t \cdot \underline{z}_0 + \sum_{\ell=1}^t \underline{\Phi}^{t-\ell} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \underline{v}(\ell), \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

II.3.B.4 Zur numerischen Bestimmung von $\underline{V}_0$ und $\underline{V}_{\theta 0}$

Um die Ableitungen von $\underline{z}_n(t)$ bezüglich θ_i zu berechnen, sind - wie aus den Gl.n.130 ff und den Flußdiagrammen Bild 49 bzw. 50 zu entnehmen ist - jeweils inhomogene Vektordifferenzengleichungen vom Typ

$$\underline{z}^i(t+1) = \underline{\Phi} \cdot \underline{z}^i(t) + \underline{\Gamma}^i \cdot \underline{v}(t); \quad \underline{z}^i(1) = \underline{0}, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (133)$$

zu lösen wobei i die Ableitung nach der i -ten Komponente θ_i bezeichnet; $\underline{v}(t)$ kann $\underline{z}_n(t)$, $\underline{u}(t)$ oder $(y(t) - \theta_{4n+2})$ sein. Geht man z.B. von Gl.124 aus so ergibt sich $\underline{\Gamma}^i \cdot \underline{v}(t)$ z.B. zu

$$\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \theta_i} \cdot \underline{z}(t) = \begin{bmatrix} -\delta_{ni} \\ -\delta_{(n-1)i} \\ \vdots \\ -\delta_{1i} \end{bmatrix} \cdot \underline{z}_n(t).$$

Die Lösung von Gl.133 ist - wie oben allgemein gezeigt -

$$\underline{z}^i(t+1) = \sum_{\ell=1}^t \underline{\Phi}^{t-\ell} \cdot \underline{\Gamma}^i \cdot \underline{v}(\ell) \quad ; \quad \underline{z}^i_n(t) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, i. \quad (134)$$

Ausgehend von diesem Ergebnis gilt

$$\underline{z}^i(t+1) = \sum_{\ell=1}^{t-1} \underline{\Phi}^{t-\ell} \cdot \underline{\Gamma}^i \cdot \underline{v}(\ell) + \underline{\Gamma}^i \cdot \underline{v}(t) \quad (135)$$

In Gl.(135) sei der Ausdruck $\underline{\Phi} \cdot \underline{\Gamma}^i$ genauer untersucht; ausführlich folgt z.B. für Gl.124 - siehe auch Gl.94 -

$$\underline{\Phi} \cdot \underline{\Gamma}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_n \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & -\gamma_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & -\gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & -\delta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\delta_{ni} \\ -\delta_{(n-1)i} \\ -\delta_{(n-2)i} \\ \vdots \\ -\delta_{2i} \\ -\delta_{1i} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} + \gamma_n \cdot \sigma_{1i} \\ -\sigma_{ni} + \gamma_{n-1} \cdot \sigma_{1i} \\ -\sigma_{(n-1)i} + \gamma_{n-2} \cdot \sigma_{1i} \\ \vdots \\ -\sigma_{3i} + \gamma_2 \cdot \sigma_{1i} \\ -\sigma_{2i} + \gamma_1 \cdot \sigma_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma_{ni} \\ -\sigma_{(n-1)i} \\ \vdots \\ -\sigma_{3i} \\ -\sigma_{2i} \end{bmatrix} + \sigma_{1i} \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (136)$$

Für $i \neq 1$ ist der zweite Term in Gl.136 stets null, so daß

$$\Phi \cdot \Gamma^i = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma_{ni} \\ -\sigma_{(n-1)i} \\ \vdots \\ -\sigma_{3i} \\ -\sigma_{2i} \end{bmatrix} \quad (137a)$$

für $i = 2, 3, \dots, n$.

Mit der Definition $\delta_{ni} = \sigma_{i-n}$ für das Kronecker-Symbol erweist sich die rechte Seite von Gl.137 als Γ^{i-1} - wie man leicht nachprüfen kann - so daß gilt

$$\Phi \cdot \Gamma^i = \Gamma^{i-1} \quad i=2, 3, \dots, n \quad (137b)$$

Damit läßt sich Gl.135 jedoch umschreiben zu

$$\underline{z}^i(t+1) = \sum_{\ell=1}^{t+1} \Phi^{t-\ell+1} \cdot v(\ell) \cdot \Gamma^{i-1} + \Gamma^i \cdot v(t).$$

Aus Gl.135 folgt nun allgemein

$$\underline{z}^{i-1}(t) = \sum_{\ell=1}^t \Phi^{t-\ell+1} \cdot \Gamma^{i-1} \cdot v(\ell)$$

und damit die wichtige Beziehung

$$\underline{z}^i(t+1) = \underline{z}^{i-1}(t) + \Gamma^i \cdot v(t) \quad (138)$$

Die i -te Ableitung von $z_n(t)$ ermittelt sich damit zu

$$z_n^i(t+1) = z_n^{i-1}(t) \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (139)$$

Gleichung (139), deren Gültigkeit sich in ähnlicher Form auch für die anderen Bereiche $i=n+2, \dots, 2n$ bzw. $i=2n+2, \dots, 3n$ bzw. $i=3n+2, \dots, 4n$ nachweisen läßt, bringt eine wesentliche Vereinfachung der numerischen Berechnung: genügt es doch, nur die Ableitungen $\frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_1}$ bzw. $\frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_{n+1}}$ bzw. $\frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_{2n+1}}$

bzw. $\frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_{3n+1}}$

zu berechnen, um durch Zeit-Verschiebung auf sämtliche Ableitungen schließen zu können:

$$\frac{\partial z_n(t+1)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial z_n(t)}{\partial \theta_{i-1}} = \frac{\partial z_n(t-1)}{\partial \theta_{i-2}} = \dots = \frac{\partial z_n(t-2+1)}{\partial \theta_1},$$

für $i = 2, 3, \dots, n$.

Allgemein lassen sich damit für die einzelnen Gültigkeitsbereiche folgende rekursiven Berechnungsvorschriften angeben, /54/:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_n(t)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial z_n(t-i+1)}{\partial \theta_1}, & i &= 2, 3, \dots, n; \\ \frac{\partial z_n(t)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial z_n(t-i+n+1)}{\partial \theta_{n+1}}, & i &= n+2, \dots, 2n; \\ \frac{\partial z_n(t)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial z_n(t-i+2n+1)}{\partial \theta_{2n+1}}, & i &= 2n+2, \dots, 3n; \\ \frac{\partial z_n(t)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial z_n(t-i+3n+1)}{\partial \theta_{3n+1}}, & i &= 3n+2, \dots, 4n. \end{aligned} \quad (140)$$

Ähnliche Überlegungen führen auch bei der Berechnung der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 \varepsilon(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ zu vereinfachenden Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_n(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 z_n(t-i-j+2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_1}, & i, j &= 2, 3, \dots, n; \\ \frac{\partial^2 z_n(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 z_n(t-i-j+n+2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_{n+1}}, & i &= 2, 3, \dots, n, \\ & & j &= n+2, \dots, 2n; \\ \frac{\partial^2 z_n(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 z_n(t-i-j+2n+2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_{2n+1}}, & i &= 2, 3, \dots, n, \\ & & j &= 2n+2, \dots, 3n; \\ \frac{\partial^2 z_n(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 z_n(t-i-j+3n+2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_{3n+1}}, & i &= 2, 3, \dots, n, \\ & & j &= 3n+2, \dots, 4n. \end{aligned} \quad (141)$$

II.3.B.5 Entwicklung des Digitalprogramms

Nachdem gezeigt wurde, wie der numerische Rechenaufwand wesentlich reduziert werden kann, soll das Rechenprogramm entwickelt werden. Ausgehend von Gl.(114) zerfällt es in die Berechnung von $\underline{V}_0(\underline{\theta}^k)$ und $\underline{V}_{\theta\theta}(\underline{\theta}^k)$, wobei $\underline{\theta}^k$ ein bekannter Anfangsvektor ist; der verbesserte Parametervektor ist dann

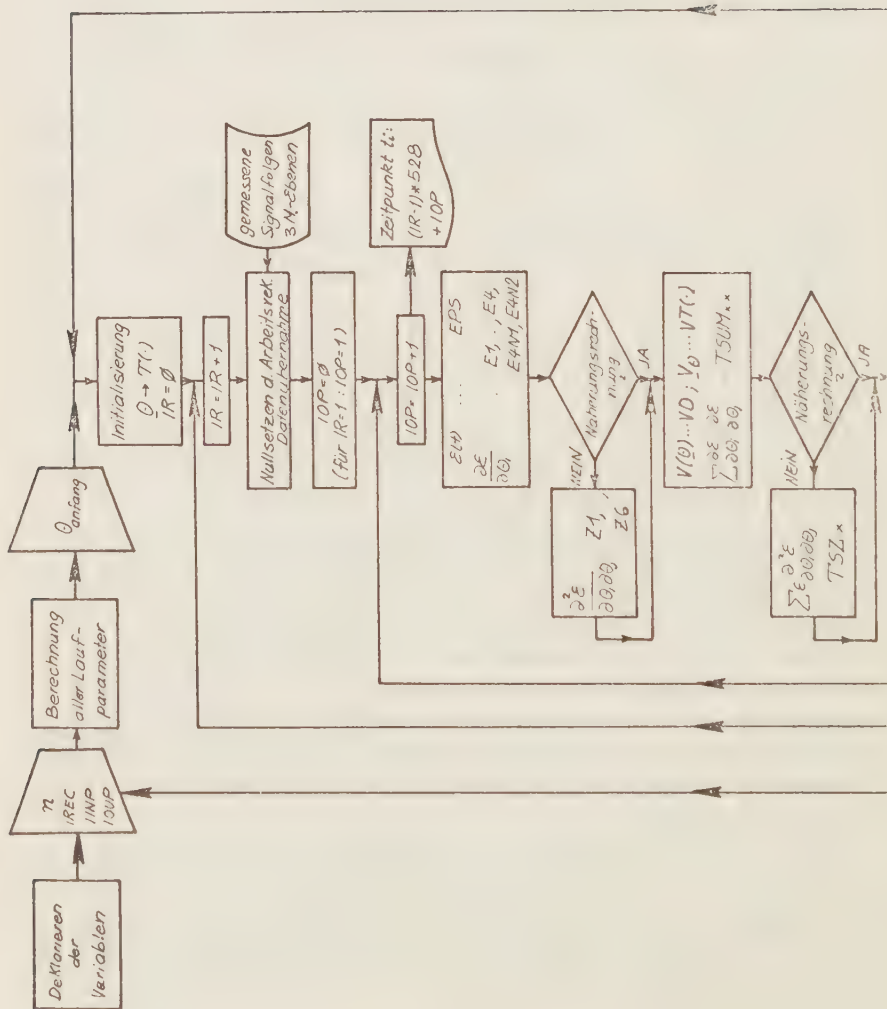
$$\underline{\theta}^{k+1} = \underline{\theta}^k - \underline{V}_{\theta\theta}(\underline{\theta}^k)^{-1} \cdot \underline{V}_0(\underline{\theta}^k). \quad (114)$$

Bild 51 zeigt das Flußdiagramm, das im folgenden mit den Blockschaltbildern 49 bzw. 50 erläutert werden soll. Charakteristisch sind - ähnlich wie beim Digitalprogramm von Teil I - die vielfältigen Eingriffsmöglichkeiten des Experimentators.

Zunächst erwartet das Programm die Eingabe der Ordnung n der Modellvorstellung, der Anzahl der zu verwendenden Datensätze IREC - die über $N=IREC*528$ die Datenzahl festlegt - sowie die Angabe der zu analysierenden Meßebenen durch die Parameter IINP bzw. IOUP (für IINP = IOUP erfolgt natürlich eine Fehlermeldung; Rückstart ist möglich); die Eingabeeinheit ist dabei üblicherweise die Teletype. In zwei ineinandergeschachtelten Schleifen, die IREC- bzw. 528-mal durchlaufen werden, wird dann aufgrund von vorgegebenen Anfangswerten, über deren Ermittlung noch einiges auszuführen ist, die ML-Abschätzung ermittelt. Mit Hilfe des erwähnten Newton-Raphson-Algorithmus wird dabei ein neuer Parametervektor $\underline{\theta}$ berechnet, anschließend überprüft, ob die geforderte Genauigkeit der Parameter erreicht ist und dann je nach Ergebnis dieser Prüfung entweder die Rechnung - mit der gefundenen Lösung - abgebrochen oder mit dem gerade bestimmten neuen, verbesserten Parametervektor $\underline{\theta}^{k+1}$ als Startvektor eine weitere Abschätzung vorgenommen. Es besteht zusätzlich die Möglichkeit, die Ordnung n des Modells anschließend zu ändern.

Ausgehend von den Blockschaltbildern 49, 50 sowie den Systemgleichungen -Gl.95 a,b - seien zuerst einige Hinweise zur Berechnung von $\varepsilon(t)$ bzw. $z_n(t)$ gegeben. Mit Gl.95b ist $\varepsilon(t)$ mit $z_n(t)$ bei bekanntem $u(t)$, $y(t)$ festgelegt. $z_n(t)$ bzw. $\underline{z}(t)$ folgt aus Gl.95a, die jetzt noch einmal ausführlich angegeben werden soll:

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi} \underline{z}(t) + [u(t) + \underline{\Delta} [y(t) - \underline{\theta}_{4n+2}]] \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (95a)$$



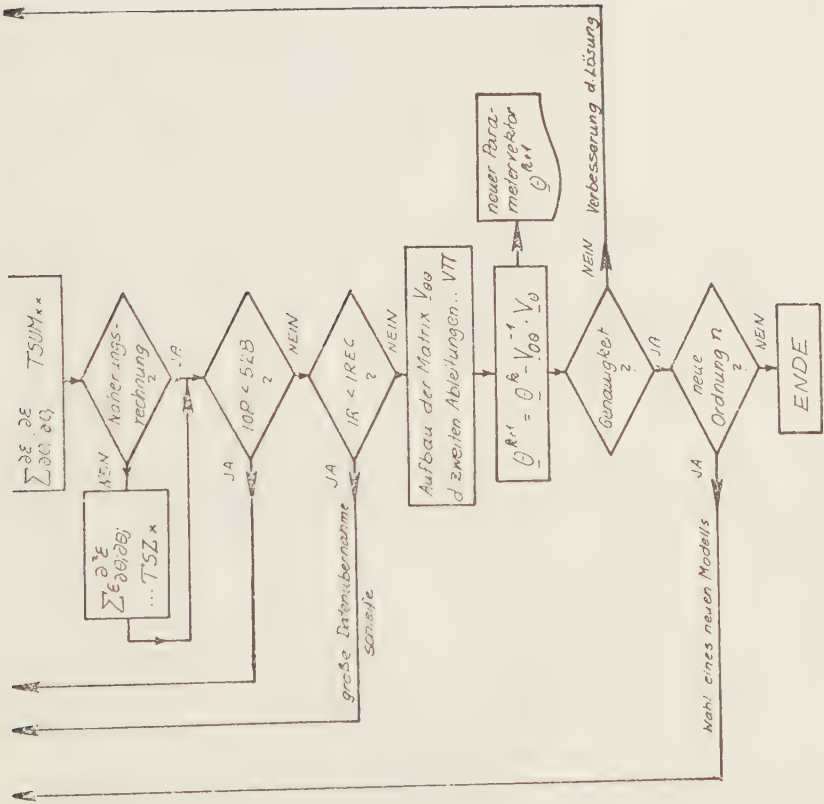


Bild 51 : Flußdiagramm zur Berechnung der ML-Abschätzung

$$\begin{bmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \\ z_3(t+1) \\ \vdots \\ z_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\theta_n \\ 1 & 0 & 0 & & -\theta_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & & -\theta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & -\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \underline{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (95a)$$

$$\underline{z}(t+1) = \underline{\Phi} \cdot \underline{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_n \cdot z_n \\ z_1 & -\theta_{n-1} \cdot z_n \\ z_2 & -\theta_{n-2} \cdot z_n \\ \vdots & \vdots \\ z_{n-2} & -\theta_2 \cdot z_n \\ z_{n-1} & -\theta_1 \cdot z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_n \\ \theta_{n-1} \\ \theta_{n-2} \\ \vdots \\ \theta_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \cdot z_n$$

$$\begin{aligned} z_1(t+1) &= -\theta_n \cdot z_n \\ z_2(t+1) &= z_1(t) - \theta_{n-1} \cdot z_n \\ &\vdots \\ z_n(t+1) &= z_{n-1}(t) - \theta_1 \cdot z_n \end{aligned}$$

d.h. aber, daß sich der Vektor $\underline{z}(t+1)$ aus $\underline{z}(t)$ durch eine Zeitverschiebung um eine Zeiteinheit plus einer entsprechenden Beeinflussung über die Parameter $\theta_1 \dots \theta_n$ und z_n bestimmt. Programmiert lautet dies einfach:

```

ZN = Z(N)
DO 1 I = 2,N
  IZ = N - I + 2
  1  Z(IZ) = Z(IZ-1) - ZN*T(I-1)
  Z(1) = - ZN*T(N)

```

(mit ZN ← Zwischenspeicher zur Aufbewahrung von Z(N)).

Und weiterhin mit Gl.95b in der entsprechenden Nomenklatur für den neuen Vektor $\underline{z}(t+1)$

```

DO 2 I = 1,N
  2  Z(I) = - Z(I) + G(I) * U + D(I) * (Y-T(I4NP2)).

```

Sämtliche Ableitungen berechnen sich - wie leicht einzusehen ist - über entsprechend ähnliche Rechenoperationen; es ist dabei jeweils der Aufbau der Original- bzw. abgeleiteten Vektoren bzw. Matrizen berücksichtigt, um zu größtmöglichen Vereinfachungen d.h. aber zu möglichst geringen Rechenzeiten zu kommen. Zur besseren Übersichtlichkeit ist im angefügten Programmbeispiel die Berechnung der einzelnen Ableitungen bereichsweise getrennt aufgeführt. Das Blockschaltbild 52 zeigt schematisch die Bestimmung sämtlicher Ableitungen.

Nachdem sämtliche Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $\varepsilon(t)$ sowie $\mathcal{E}(t)$ selbst berechnet sind, kann Gl.116, d.h. der Vektor $\underline{V}_0$, bestimmt und weiterhin die Matrix $\underline{V}_{00}$ angegeben werden.

Die Elemente
$$\frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i} \quad i = 1, 2, \dots, 4n+2 \quad (116)$$

der ersten Ableitung der Fehlerfunktion $V(\theta)$ nach den unbekannten Parametern lassen sich dabei fortlaufend aufsummieren, so daß nach Abarbeitung der Daten Gl.116 automatisch festliegt.

Für die Ermittlung der Elemente der Matrix $\underline{V}_{00}$ müssen noch einige zusätzliche Überlegungen angestellt werden. Zunächst ist wegen

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon(t)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \quad i, j = 1, 2, \dots, 4n+2$$

$\underline{V}_{00}$ symmetrisch zur Hauptdiagonalen, so daß statt $(4n+2)^2$ nur noch höchstens $(2n+1)(4n+3)$ Elemente zu bestimmen sind. Aus Gl.117 ist ersichtlich, daß sie aus zwei Teilsummen bestehen:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_j} \\ 2. \quad & \sum_{t=1}^N \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, 4n+2$$

Es seien zunächst die 'Produktsummen erster Ordnung' nach 1. betrachtet. Für $1 \leq i \leq n$ sowie $1 \leq j \leq n$ ist wegen Gl.134

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_j} = 0 \quad \text{für } t \neq j,$$

Ableitungen erster Ordnung + E(H)

$\Sigma(H)$
 $Dgl.: \quad \underline{z}(t+1) = \phi \cdot \underline{z}(t) + \Gamma [u(t) + \Delta [y(t) - \theta_{u,n+2}]]$
 mit $\underline{z}(0) = \underline{z}_0$
 $\underline{z} =: \phi \cdot \underline{z}$
 $\underline{z} =: \phi \cdot \underline{z} + \Gamma [u + \Delta [y - \theta_{u,n+2}]]$
 $\underline{z} =: y - z_n - \theta_{u,n+1} u - \theta_{u,n+2}$

$E1(1)$
 $\underline{z} = 1, 2, \dots, n$
 $Dgl.: \quad \frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_i} = - \frac{\partial z_n}{\partial \theta_i} (t-1+1) + \phi \frac{\partial z(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}$
 $\frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_i} =: \phi \cdot \frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_i}$
 $\frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_i} =: \frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \cdot \underline{z}$

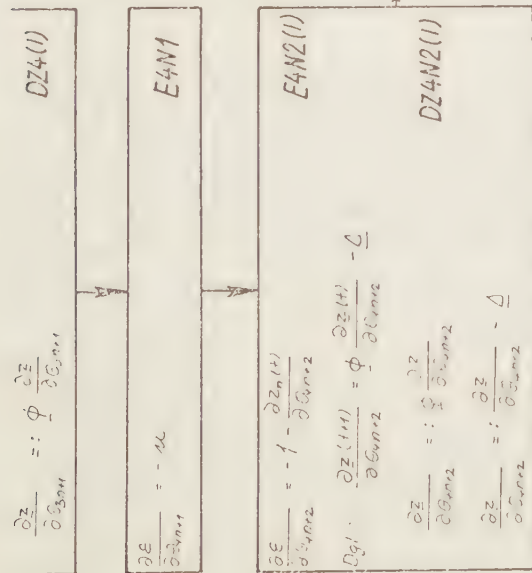
$E4(1)$
 $\underline{z} = 3n+1, \dots, 4n$
 $Dgl.: \quad \frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_i} = - \frac{\partial z_n}{\partial \theta_i} (t-1+3n+1) + \phi \frac{\partial z(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}$
 mit $\frac{\partial \underline{z}(1)}{\partial \theta_{3n+1}} = 1$
 $\frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_{3n+1}} =: \phi \cdot \frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_{3n+1}}$

Ableitungen zweiter Ordnung

$Z1(1)$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = - \frac{\partial^2 z_n}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (t-1-j+2) + \phi \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (t)$
 $Dgl.: \quad \frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} =: \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} =: \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_j}$

$Z2(1)$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = - \frac{\partial^2 z_n}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (t-1-j+n+2) + \phi \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (t) + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$
 $Dgl.: \quad \frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} =: \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} =: \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_j}$

$Z4(1)$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = - \frac{\partial^2 z_n}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (t-1-j+3n+2) + \phi \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (t) + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$
 $Dgl.: \quad \frac{\partial^2 \underline{z}(t+1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}(t)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} =: \phi \cdot \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$
 $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} =: \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \underline{z}}{\partial \theta_j}$



so daß

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_j} = \sum_{t=j+1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_j} = \sum_{t=j+1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t-1+1)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t-j+1)}{\partial \theta_j};$$

mit $t =: t-i+1$ folgt daraus

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_j} = \sum_{t=j-i+2}^{t^*-i+1} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t+i-j)}{\partial \theta_j} \quad (142a)$$

Mit Gl.142a gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{i+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{j+1}} &= \sum_{t=j-i+2}^{t^*-i} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{i+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t+i-j)}{\partial \theta_{j+1}} \\ &= \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \varepsilon(t^*-i+1)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t^*-j+1)}{\partial \theta_j}; \end{aligned} \quad (142b)$$

dies läßt sich weiterführen:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{i+2}} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{j+2}} &= \sum_{t=j-i+2}^{t^*-i-1} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{i+2}} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t+i-j)}{\partial \theta_{j+2}} \\ &= \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \varepsilon(t^*-i+1)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t^*-j+1)}{\partial \theta_j} \\ &\quad - \frac{\partial \varepsilon(t^*-i)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t^*-j)}{\partial \theta_j}; \end{aligned} \quad (142c)$$

usf.....

Die Systematik, wie sie in den Gl.142a,b,c zum Ausdruck kommt, läßt sich auch für die Bereiche $i=1,2,\dots,n$ und $j=n+1,\dots,2n$ bzw. $j=2n+1,\dots,3n$ bzw. $j=3n+1,\dots,4n$ nachweisen. Ist nun t^* genügend groß ($n \ll t^*$), dann tragen die letzten Terme in den Gl.n.142a-c nicht signifikant zum Summenwert bei, so daß sie vernachlässigt werden können. Für den Bereich $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq 4n$ müssen daher statt der $2n(n+1)$ Produktsummen erster Ordnung nur $4n$ Summen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1}, \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2}, \dots, \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_n}; \\ &\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+1}}, \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+2}}, \dots, \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{2n}}; \quad (143) \\ &\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{2n+1}}, \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{2n+2}}, \dots, \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{3n}}; \\ &\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{3n+1}}, \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{3n+2}}, \dots, \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{4n}}. \end{aligned}$$

Entsprechende Überlegungen für die Bereiche

$$i=n+1, n+2, \dots, 2n \quad \text{und} \quad j=n+1, n+2, \dots, 4n$$

$$\text{bzw.} \quad i=2n+1, 2n+2, \dots, 3n \quad \text{und} \quad j=2n+1, 2n+2, \dots, 4n$$

$$\text{bzw.} \quad i=3n+1, 3n+2, \dots, 4n \quad \text{und} \quad j=3n+1, 3n+2, \dots, 4n$$

lassen auch hier den Rechenaufwand erheblich kleiner werden.

$$\text{Statt} \quad \frac{3n(n+1)}{2} \quad \text{sind nur } 3n,$$

$$\text{"} \quad \frac{2n(n+1)}{2} \quad \text{sind nur } 2n,$$

$$\text{"} \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{sind nur } n$$

Teilsommen zu bestimmen. In Bild 53 sind die bisher bekannten Terme nach Gl.143 durch die mit AA...DD gekennzeichneten oberen Dreieck-Felder markiert. Für die Berechnung der entsprechenden unteren Dreieck-Felder, bezeichnet mit BA, CA, ..., DC, ermittelt man (für BA z.B.)

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+1}} = \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t-1)}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{n+1}},$$

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_3} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+1}} = \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t-2)}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{n+1}},$$

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n-1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+1}} = \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t-n+2)}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{n+1}},$$

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_n} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+1}} = \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t-n+1)}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{n+1}}.$$

Aufgrund der obigen Überlegungen kann man für $t^* \gg n$ dann schreiben

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+1}} \Rightarrow \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_3} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+2}} = \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon(t-2)}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_{n+1}}$$

⋮

usw.,

wobei die beiden Summen links und rechts des Zuordnungspfeils bis auf einen (zusätzlichen) vernachlässigbaren Term miteinander übereinstimmen. Damit sind für die vollständige Berechnung der Felder BA, ..., DC nur die

folgenden Teilprodukte zu ermitteln :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{n+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n, \\
 & \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{2n+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n, \\
 & \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{3n+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (144) \\
 & \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{2n+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \quad , \quad i = n+2, \dots, 2n, \\
 & \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{3n+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \quad , \quad i = n+2, \dots, 2n, \\
 & \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{3n+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} \quad , \quad i = 2n+2, \dots, 3n.
 \end{aligned}$$

Es bleiben nun noch folgende Teilprodukte übrig (mit AE...DF bezeichnet):

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{4n+j}} \quad , \quad \dots \quad , \quad \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{4n}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{4n+j}} \quad j = 1, 2, \quad (145)$$

sowie schließlich noch

$$\sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta_{4n+1}^2} \quad , \quad \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{4n+1}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{4n+2}} \quad , \quad \sum_{t=1}^{t^*} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta_{4n+2}^2} \quad . \quad (146)$$

Da $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_{4n+1}} = -u$, vereinfachen sich die Gl.n.(145), (146) noch, jedoch können keine weiteren Näherungen eingeführt werden. Nach diesen Ausführungen kann festgestellt werden, daß statt der ursprünglich $(4n+2)^2$ Elemente nur insgesamt $(24 \cdot n - 3)$ Matrixterme berechnet werden müssen. Alle weiteren Summen ergeben sich wie in Gl.142a-c beschrieben.

Nachdem der Aufbau der Matrix V_{00} aus den Ableitungen erster Ordnung beschrieben ist, bleibt noch zu erwähnen, wie die Ableitungen zweiter Ordnung -Gl.117- einzufügen sind. Ausgehend von Bild 50 sowie den Gleichungen

(129), (130) und (132) müssen in Bild 53 noch die folgenden Dreieckfelder modifiziert werden:

Bereich	$i=1,2,\dots,n$ und $j=1,2,\dots,n$	: AA
"	$i=1,2,\dots,n$ und $j=n+1,\dots,2n$	: AB und BA
"	$i=1,2,\dots,n$ und $j=2n+1,\dots,3n$	: AC und CA
"	$i=1,2,\dots,n$ und $j=3n+1,\dots,4n$	: AD und DA
"	$i=1,2,\dots,n$ und $j=4n+2$	: AF
"	$i=2n+1,\dots,3n$ und $j=4n+2$	: CF .

Die Berechnung dieser Terme sei für den Bereich $i=1,2,\dots,n$ und $j=n+1,\dots,2n$ kurz aufgezeigt:

$$\frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=n+1,\dots,2n .$$

Es gilt nach Gl.141

$$\frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial \theta_{i_1} \partial \theta_{j_1}} = \frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial \theta_{i_2} \partial \theta_{j_2}} \quad \text{wenn } i_1+j_1=i_2+j_2$$

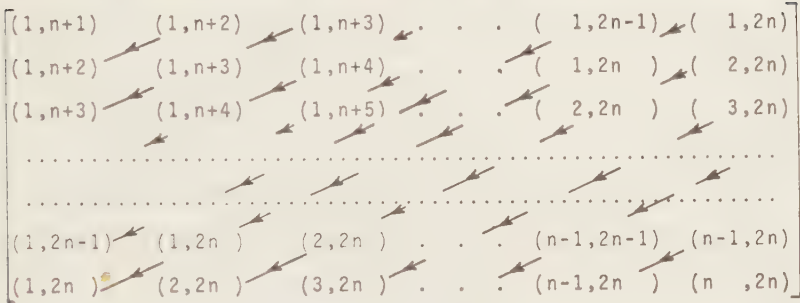
Damit wird aus dem Feld (AB-BA) nach Bild 54

$$\left[\begin{array}{cccccccc} (1,n+1) & (1,n+2) & (1,n+3) & . & . & . & (1,2n-1) & (1,2n) \\ (2,n+1) & (2,n+2) & (2,n+3) & . & . & . & (2,2n-1) & (2,2n) \\ (3,n+1) & (3,n+2) & (3,n+3) & . & . & . & (3,2n-1) & (3,2n) \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ (n-1,n+1) & (n-1,n+2) & (n-1,n+3) & . & . & . & (n-1,2n-1) & (n-1,2n) \\ (n,n+1) & (n,n+2) & (n,n+3) & . & . & . & (n,2n-1) & (n,2n) \end{array} \right]$$

$$(i,j) \text{ bedeutet } \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

Bild 54 : Berechnung der zweiten Ableitungen; Teilfeld (AB-BA);
insgesamt n^2 Terme.

das effektiv zu berechnende Feld nach Bild 55. Dies enthält jedoch nur



(i, j) bedeutet $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$

Bild 55 : Berechnung der zweiten Ableitungen; Teilfeld (AB-BA),
nach Rechenvereinfachung sind nur noch $(2n-1)$ verschiedene
Terme vorhanden

noch $2n-1$ verschiedene Terme. Die Abspeicherung erfolgt in entsprechenden Vektoren, wobei mit $k=i+j-n-1$ auf den individuellen Speicherplatz - bei Kenntnis von $i=1,2,\dots,n$ und $j=n+1,\dots,2n$ - geschlossen werden kann. Zum Abschluß dieser Ausführungen zur Berechnung der Matrix V_{00} soll zur besseren Lesbarkeit des Digitalprogramms noch der Übergang der hier in den Flußdiagrammen verwendeten Bezeichnungen zu den im Programm vorkommenden Vektoren angegeben werden:

Erste Ableitungen :

AA $\triangleq$ TSUM1(n)	AB $\triangleq$ TSUM2(n)
AC $\triangleq$ TSUM3(n)	AD $\triangleq$ TSUM4(n)
AE $\triangleq$ TSUM5(n)	AF $\triangleq$ TSUM6(n)
BD $\triangleq$ TSUM7(n)	BC $\triangleq$ TSUM8(n)
BD $\triangleq$ TSUM9(n)	BE $\triangleq$ TSUM10(n)
BF $\triangleq$ TSUM11(n)	CC $\triangleq$ TSUM12(n)
CD $\triangleq$ TSUM13(n)	CE $\triangleq$ TSUM14(n)
CF $\triangleq$ TSUM15(n)	DD $\triangleq$ TSUM16(n)

DE $\hat{=}$ TSUM17(n)	DF $\hat{=}$ TSUM18(n)
BA $\hat{=}$ TSUM21(n)	CA $\hat{=}$ TSUM32(n)
DA $\hat{=}$ TSUM43(n)	CB $\hat{=}$ TSUM87(n)
DB $\hat{=}$ TSUM98(n)	DC $\hat{=}$ TSUM31(n)

Zweite Ableitungen :

TSZ1(2n-1)	für	$i=j=1,2,\dots,n$
TSZ2(2n-1)	"	$i=1,2,\dots,n \quad j=n+1,\dots,2n$
TSZ3(2n-1)	"	$i=1,2,\dots,n \quad j=2n+1,\dots,3n$
TSZ4(2n-1)	"	$i=1,2,\dots,n \quad j=3n+1,\dots,4n$
TSZ5(n)	"	$i=1,2,\dots,n \quad j=4n+2$
TSZ6(n)	"	$i=2n+1,\dots,3n \quad j=4n+2$

II.3.B.6 Mehrdeutigkeit der Lösung, Wahl der Startwerte;

Rechnen mit genäherten zweiten Ableitungen

Bei der numerischen Lösung des Problems können - wie z.T. schon erwähnt - zwei Hauptschwierigkeiten auftreten

1. $V(\theta)$ hat mehrere lokale Minima;
2. Wahl der Startwege.

Für den allgemeinen Fall - wie er hier betrachtet wurde - läßt sich nur schwer eine Vorschrift angeben, wie Nebenminima mit einfachen Mitteln zu verhindern sind (siehe /57/). Wie eine kurze Überlegung, die in der einschlägigen Fachliteratur z.B./56/,/59/ zu finden ist, jedoch zeigt, wird die Abschätzung mit der Wahrscheinlichkeit 1 gegen die wahren Werte konvergieren, falls die Anzahl der Daten über alle Grenzen wächst. Bei sehr beschränkter Datenzahl könnte man, wie in /58/ beschrieben, auch zusätzliche Kriterien überprüfen, um ein gewonnenes Ergebnis zu sichern. Dies ist jedoch recht zeitaufwendig, so daß für die praktische Analyse in der vorliegenden Arbeit folgender Weg beschritten wurde:

1. Es wird von einem Teil der zur Verfügung stehenden Daten ausgegangen und hieraus eine Abschätzung ermittelt.
2. Die Datenzahl wird erhöht und die damit erhaltenen Ergebnisse mit der zuvor gewonnenen Abschätzung verglichen.

Da durch den Lösungsalgorithmus eine rationale Approximation der an sich transzendenten Übertragungsfunktion der Modellgleichungen des Teils I vorgenommen wird, ist klar, daß prinzipiell durch eine Erhöhung der Ordnung n des Modells nach Gl.(88) eine bessere Beschreibung der Aufstromkolonne erfolgen müßte. Daher wird bei der Analyse von $n=2$ als niedrigster Ordnung ausgegangen und

3. die Ordnung n des Modells auf $n=3$, $n=4$, usw. erhöht.

Es wird registriert, wie groß $V(0)$ im jeweiligen Fall ist. Dabei wird man neben einer beträchtlichen Verlängerung der Meßzeit ($4n+2$ Parameter !) in den meisten praktischen Untersuchungen feststellen, daß sich oberhalb von $n=6$ (in manchen Fällen auch schon bei $n=5$) - abgesehen von einer unzulässig großen Rechenzeit - infolge von Rundungs-(Rechen-)fehlern keine wesentliche Verbesserung der Approximation mehr ergibt.

Was nun die Wahl geeigneter Startwerte anlangt, so wird folgender Weg beschritten:

Ausgehend von den Systemgleichungen (88) bzw. (95) wird angenommen, daß keine Meßfehler die Prozeßdaten verformt haben, so daß dann gilt

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot y(t \cdot R) = \sum_{k=0}^n \beta_k \cdot u(t \cdot R) + \lambda e(t) + K, \quad t=1,2,\dots,N. \quad (147)$$

(Dieser Weg wird auch in /54/ und /62/ beschritten, wobei noch erwähnt sei, daß in /62/ auch auszugsweise ein Digitalprogramm zur Ermittlung der ML-Abschätzung beschrieben ist, dessen Herleitung jedoch z.T. fehlerhaft und unvollständig ist).

Äquivalent zu Gl.(147) ist

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} Z(t) + \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} U(t) + \begin{bmatrix} -\alpha_n \\ -\alpha_{n-1} \\ \vdots \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} [Y(t) + K], \quad (148)$$

$$\varepsilon(t) = \lambda \cdot e(t) = y(t) - z_n(t) - \beta_0 \cdot u(t) - \kappa$$

$$t=1,2,\dots,N.$$

Dieses Problem - Gln(147) und (148) - wurde im wesentlichen von Kalman behandelt und gelöst, /63/. Es führt auf eine Abschätzung der Koeffizienten nach der Methode der kleinsten mittleren Fehlerquadrate. Der Startwert für dieses Problem ist relativ frei wählbar, da - wie man leicht überprüfen kann - $V^*(\underline{\theta})$ eine quadratische Form bezüglich der gesuchten Variablen θ_i , $i=n+1, n+2, \dots, 4n+2$ besitzt. Dies hat zur Folge, daß der Newton-Algorithmus in einem Schritt - ausgehend von einem beliebigen Startwert $\underline{\theta}^{*0}$ zum richtigen Ergebnis $\underline{\theta}^*$ führt. $\underline{\theta}^{*0}$ kann daher der Einfachheit halber zu $\underline{0}$ gewählt werden. Im einzelnen ergibt sich:

$$\underline{\theta}^{*R+1} = - \left\{ \underline{V}_{\theta\theta}^*(\underline{\theta}^{*R}) \right\}^{-1} \cdot \underline{V}_{\theta}(\underline{\theta}^{*R});$$

$$\left(\underline{V}_{\theta}^* \right)_i = \frac{\partial V^*}{\partial \theta_i} = \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i}, \quad i = n+1, \dots, 4n+2;$$

$$\left(\underline{V}_{\theta\theta}^* \right)_{ij} = \frac{\partial^2 V^*}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_j}, \quad i, j = n+1, \dots, 4n+2,$$

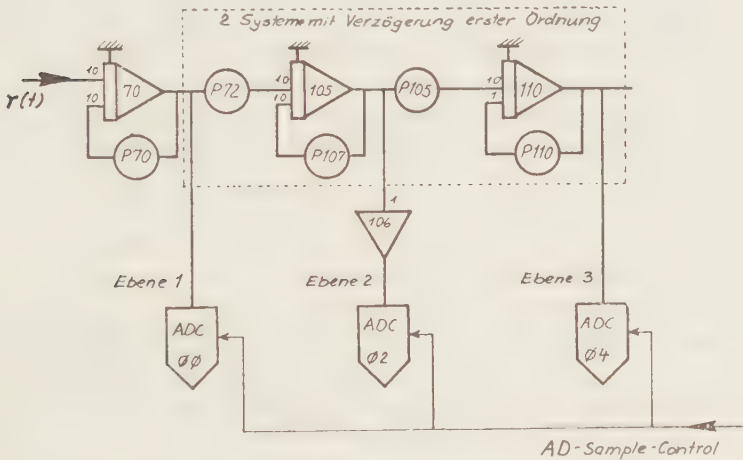
so daß die Abschätzung der Startwerte recht schnell vorgenommen werden kann. Im beschriebenen Digitalprogramm wird dies vor der eigentlichen großen Arbeitsschleife gemacht. Als Ergebnis erhält man $\underline{\theta}^0$, wobei natürlich für die ersten n Parameter $\theta_1, \dots, \theta_n$ keine Ergebnisse ermittelt werden.

Der verwendete Newton-Algorithmus besitzt eine sehr gute - quadratische - Konvergenz, falls im untersuchten Bereich überhaupt eine sichere Konvergenz möglich ist. Um dies zu erreichen, wurde im Programm eine Eingriffsmöglichkeit - über digitale SENSE SWITCHES - vorgesehen, wodurch mit genäherten 2. Ableitungen gerechnet wird, d.h. in der Matrix $\underline{V}_{\theta\theta}$ der zweiten Ableitungen werden nur die Produktsummen erster Ordnung in jedem Schritt neu berechnet, dagegen jedoch die Produktsummen zweiter Ordnung unverändert gelassen. Der Rechenalgorithmus wird dadurch zwar wesentlich langsamer zum richtigen Parameter $\underline{\theta}$ führen, jedoch nicht - wie bei der reinen Newton-Vorschrift - divergent sein. Sofern der Experimentator feststellt

(oder festzustellen glaubt), daß der gerade bestimmte Vektor $\underline{\hat{\theta}}$ sehr dicht bei dem wahren Wert $\underline{\theta}$ liegt, kann er natürlich zum Newton-Algorithmus zurückgekehren und damit ggf. eine schnelle Lösung erhalten.

II.3.B.7 Beispiel

Zum Abschluß der Erläuterungen zum Programm 'Maximum-Likelihood-Abschätzung' sei an einem System 2. Ordnung seine Anwendung gezeigt. Vor der Datenanalyse waren mit Hilfe des Programms 'DGL ZWEITER ORDNUNG---TEST' Eingangs/Ausgangssignalfolgen der Anlagenschaltung nach Bild 56 auf der Magnetplatte des Hybridrechners abgespeichert worden.



$P040 = .0196$
 $P072 = .5$
 $P105 = .6$
 $P107 = .5$
 $P110 = .9999$
 $P070 = .9999$

Bild 56 : Versuchsanordnung + Schaltungsdaten für M.L.-Beispiel

Die ML-Abschätzung lieferte die in Tabelle 57 aufgelisteten Werte für die unbekannten System- und Störsignalparameter.

Parameter	Iteration Nr.							
	1	2	3	4	5	6	7	8
θ_1	.0000E+0	-.6156E+0	-.3681E+0	.1127E+0	.1018E+1	.9213E+0	.9100E+0	.9082E+0
θ_2	.0000E+0	.5150E+0	.8050E+0	.7325E+0	.6492E+0	.5072E+0	.5591E+0	.5695E+0
θ_3	-.7731E-2	-.3136E-1	-.1273E-1	-.3038E-2	.2554E-2	.8761E-2	.2193E-1	.2224E-1
θ_4	.3505E-1	.2030E-1	-.6944E-2	-.1290E-1	-.2938E-1	.1213E-3	.1621E-2	.1713E-2
θ_5	.1252E+1	.1114E+1	.1650E+1	.2061E+1	.2885E+1	.2666E+1	.2701E+1	.2691E+1
θ_6	-.2229E+0	-.2209E+0	-.2176E+0	-.2183E+0	-.2205E+0	-.2192E+0	-.2198E+0	-.2205E+0
θ_7	-.3802E+0	-.3791E+0	-.3784E+0	-.3787E+0	-.3785E+0	-.3786E+0	-.3785E+0	-.3786E+0
θ_8	.1819E+0	-.5304E-1	-.5735E+0	-.4602E+0	-.4370E+0	-.4332E+0	-.4341E+0	-.4339E+0
θ_9	.2396E-1	-.6744E-1	.6644E-2	.1287E-1	.8004E-2	.1019E-1	.7956E-2	.8012E-2
θ_{10}	-.5018E-1	-.2905E-2	.7281E+0	.7663E+0	.5534E+0	.5575E+0	.5581E+0	.5582E+0
$2 \cdot V(\theta)$	.2035E+3	.8552E+0	.8226E+0	.4055E+0	.4034E+0	.1178E+0	.1050E+0	.9891E-1

Bild 57: Tabelle der Iterationen der ML-Abschätzung für Beispiel
(System zweiter Ordnung)

Um diese Ergebnisse mit den bekannten Systemparametern zu vergleichen, muß die Übertragungsfunktion des Test-Systems unter Berücksichtigung eines - fiktiven - Polygoninterpolators - Gl.74 - auf ein diskretes System umgerechnet werden. Es gilt für das Übertragungsverhalten der Hintereinanderschaltung von System und Interpolator

$$G(s) = I(s) \cdot F(s) = \frac{e^{Ts} + e^{-Ts} - 2}{Ts^2} \cdot \frac{V}{(s+a)(s+b)}$$

Zur Berechnung der zugehörigen Z-Übertragungsfunktion wird eine Partialbruchzerlegung vorgenommen:

$$G(s) = \frac{V(e^{Ts} + e^{-Ts} - 2)}{T} \left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+a} + \frac{D}{s+b} \right]$$

und nach Ausmultiplikation und Koeffizientenvergleich schließlich

$$G(s) = \frac{V}{T(ab)^2(a-b)} (e^{Ts} + e^{-Ts} - 2) \left[\frac{ab(a-b)}{s^2} - \frac{a^2-b^2}{s} - \frac{b^2}{s+a} + \frac{a^2}{s+b} \right]$$

$$\text{Mit } Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{T \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} ; Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} ; Z\left\{\frac{1}{s-s_1}\right\} = (1-e^{-s_1 T} \cdot z^{-1})^{-1}$$

folgt

$$Z\{G(s)\} = \frac{V(A_0 + A_1 \cdot z^{-1} + A_2 \cdot z^{-2})}{T(ab)^2(a-b)(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})};$$

wobei

$$A_0 = ab(a-b)T - a^2(1-e^{-bT}) + b^2(1-e^{-aT})$$

$$A_1 = -ab(a-b)T(e^{-aT} + e^{-bT}) + (a^2-b^2)(1-e^{T(a+b)}) + (a^2+b^2)(e^{-aT} - e^{-bT})$$

$$A_2 = ab(a-b)T \cdot e^{-T(a+b)} + (a^2-b^2)e^{-T(a+b)} + b^2e^{-bT} - a^2e^{-aT},$$

oder

$$Z\{G(s)\} = 10^{-2} \frac{0,7539495 \cdot z^2 + 2,84200695 \cdot z + 0,6687495}{z^2 - z \cdot 1,779520192 + 0,7866278611}.$$

Nach Bild 57 erhält man

$$\gamma_1 = 0,9082,$$

$$\gamma_2 = 0,5635,$$

$$\beta_0 = 0,007914$$

$$\beta_1 = \theta_3 + \beta_0 \cdot \gamma_1 = 2,942 \cdot 10^{-2},$$

$$\beta_2 = \theta_4 + \beta_0 \cdot \gamma_2 = 0,622 \cdot 10^{-2},$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 - \theta_5 = -1,7828,$$

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \theta_6 = 0,7500.$$

Betrachtet man nur die in Bild 56 angegebenen Parameter der Modellstrecke, dann ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung (Fehler zwischen 0,2% und 7%). Bemerkenswert ist die Tatsache, daß sich α_1 und α_2 sehr genau ergaben, während die Koeffizienten des Zählerpolynoms, die im wesentlichen von der Form des Haltegliedes beeinflusst werden, doch größere Fehler zeigen.

II.4 Bestimmung der s-Übertragungsfunktion

Wie bereits im Kapitel 'Allgemeines zur Identifizierung....' erläutert, kann von der z-Übertragungsfunktion - gewonnen aus der ML-Abschätzung -

unter Berücksichtigung eines (realen) Interpolators auf die gesuchte s-Übertragungsfunktion des kontinuierlichen Systems geschlossen werden (Gl.77). Hierzu wurde ein Digitalprogramm entwickelt, das im Folgenden kurz zu beschreiben ist (Bild 58). Mit der Übertragungsfunktion des Polygoninterpolators nach Gl.(74) folgt aus Gl.(77)

$$G(s) = \frac{1}{I_2(s)} \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{\tilde{M}(z)}{I_1(z)} \right\} = T s^2 \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{\tilde{M}(z) z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \right\}. \quad (149)$$

In Anlehnung an Gl.(86) läßt sich mit Gl.(88) die aus der M.L.-Abschätzung erhaltenen individuelle z-Übertragungsfunktion $\tilde{M}(z)$ angeben zu

$$\tilde{M}(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{n-1} z^{-(n-1)} + \beta_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}}.$$

Damit geht Gl.(149) in

$$G(s) = T s^2 Z^{-1} \left\{ \frac{(\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{n-1} z^{-(n-1)} + \beta_n z^{-n}) z^{-1}}{(1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n})(1 - z^{-1})^2} \right\}$$

über. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die gebrochen rationale Funktion in z^{-1} mit $K(z^{-1})$ abgekürzt:

$$K(z^{-1}) = \frac{\beta_0 z^{-1} + \beta_1 z^{-2} + \dots + \beta_{n-1} z^{-n} + \beta_n z^{-(n+1)}}{(1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n})(1 - z^{-1})^2}. \quad (150)$$

Wegen der bekannten Struktur der analysierten Strecke hat $K(z^{-1})$ nur reelle Pole z_i ; man kann daher die Partialbruchzerlegung

(151)

$$K(z^{-1}) = \frac{A_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z_2 z^{-1}} + \dots + \frac{A_n}{1 - z_n z^{-1}} + \frac{A_{11}}{1 - z^{-1}} + \frac{A_{12} z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

vornehmen (das entwickelte Programm wurde für Systeme bis zur Ordnung $n = 10$ geschrieben). Nach entsprechender Aufbereitung des Gleichungssystems für die unbekannten A_i , $i=1,2,\dots,12$ kann die s-Übertragungsfunktion in der Form

$$G(s) = T s^2 \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - \frac{\ln z_i}{T}} + \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{12}}{T s^2} \right\} \quad (152)$$

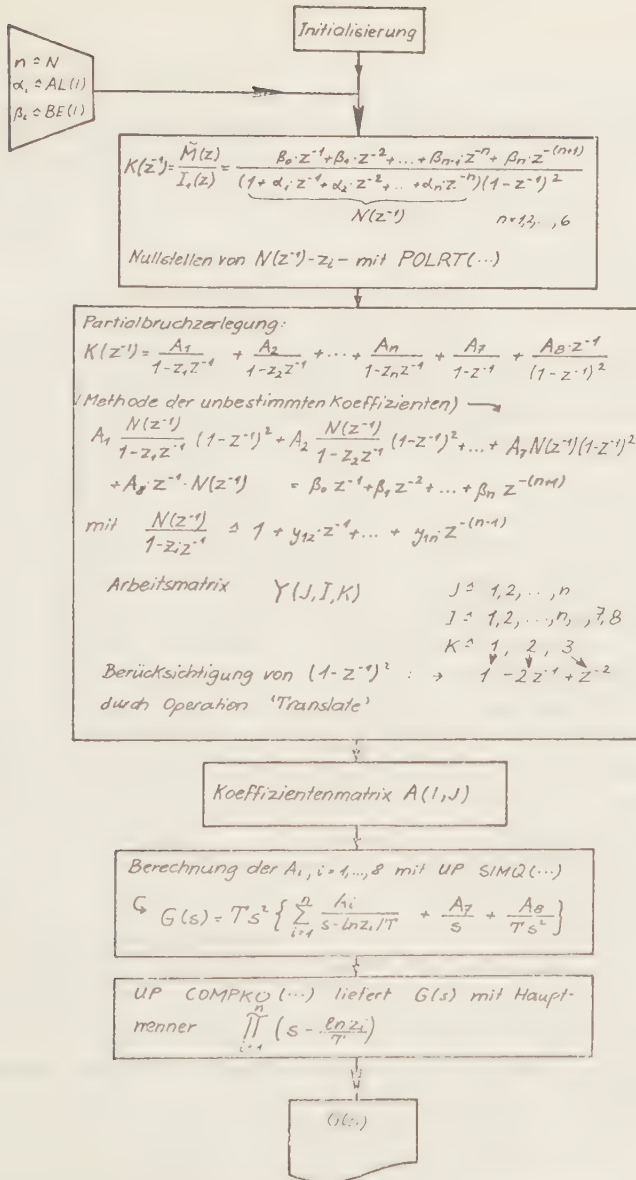


Bild 58 : Flußdiagramm zur Ermittlung von $G(s)$ aus ML-Abschätzung

bestimmt werden. Durch das Unterprogramm "COMPKO" kann $G(s)$ auf den Hauptnenner $\hat{\Pi}(sT-\ln z_1)$ gebracht werden; damit steht das Approximations-
ergebnis fest. Bild 58 zeigt das Flußdiagramm.

II.5 Meßergebnisse

Für die im ersten Teil dieser Arbeit durchgeführten Messungen wurden nach der ML-Methode diskrete bzw. nach der beschriebenen Umformung kontinuierliche Modelle bestimmt. Ausgegangen wurde von einem Modell mit der Ordnung $n=2$, die dann bis auf $n=10$ gesteigert wurde. Es zeigte sich dabei in Übereinstimmung mit den üblichen Approximationen - siehe z.B./14/ -, daß sich für die untersuchten Systeme mit örtlich verteilten Parametern i.a. eine Modellvorstellung mit näherungsweise gleichen Zeitkonstanten ergibt. Für die in Bild 59 dargestellten Gewichtsfunktionen ermittelt man z.B. für $n=3$ (einphasig $u_{OF}=61 \text{ cm/s}$) $T_1=60,14762 \text{ s}$, $T_2=59,07072 \text{ s}$, $T_3=57,97683 \text{ s}$ sowie $V=6184$. Nach Abwandlung des beschriebenen ML-Programms ergibt sich unter Annahme gleicher Zeitkonstanten T - aus mehreren Durchrechnungen - $T=57,63726$ und $V=6693$. Die zugehörigen Gewichtsfunktionen zeigen dabei nur sehr geringe Abweichungen voneinander. Für die Darstellung der erhaltenen Approximationsergebnisse wurde daher übersichtlichkeits halber auf die Angabe einzelner, nur wenig voneinander abweichender Zeitkonstanten verzichtet und der Verlauf der Mittelwerte bzw. der Bereich der gefundenen Lösungen angegeben. Es sei weiterhin erwähnt, daß mit "gemessener" Gewichtsfunktion diejenige Systemantwort bezeichnet ist, die aufgrund der Lösung des Faltungsintegrals nach Gl.38 mithilfe der Schnellen-Fourier-Transformation erhalten wurde. Für den Fall des einphasig durchströmten Reaktors zeigt Bild 60 den Verlauf der Zeitkonstanten $T_i=T_i(u_{OF},n)$, wobei auch die Bereiche der Parameter T_i angegeben sind. (die Tabelle Bild 61 enthält die numerischen Werte). Man erkennt, daß mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit u_{OF} die Zeitkonstanten T_i näherungsweise hyperbelförmig abnehmen. Für wachsende Ordnungen n ergibt sich eine entsprechende - noch wesentlich ausgeprägtere - Abnahme der Werte T_i . Gleichzeitig stellt man fest, daß mit zunehmender Ordnung n die gefundenen Lösungen T_i auch immer mehr zusammenfallen- Bild 59 soll am Beispiel der Gewichtsfunktionen zeigen, wie sich mit steigender Ordnung gemessene Gewichtsfunktion und die aufgrund

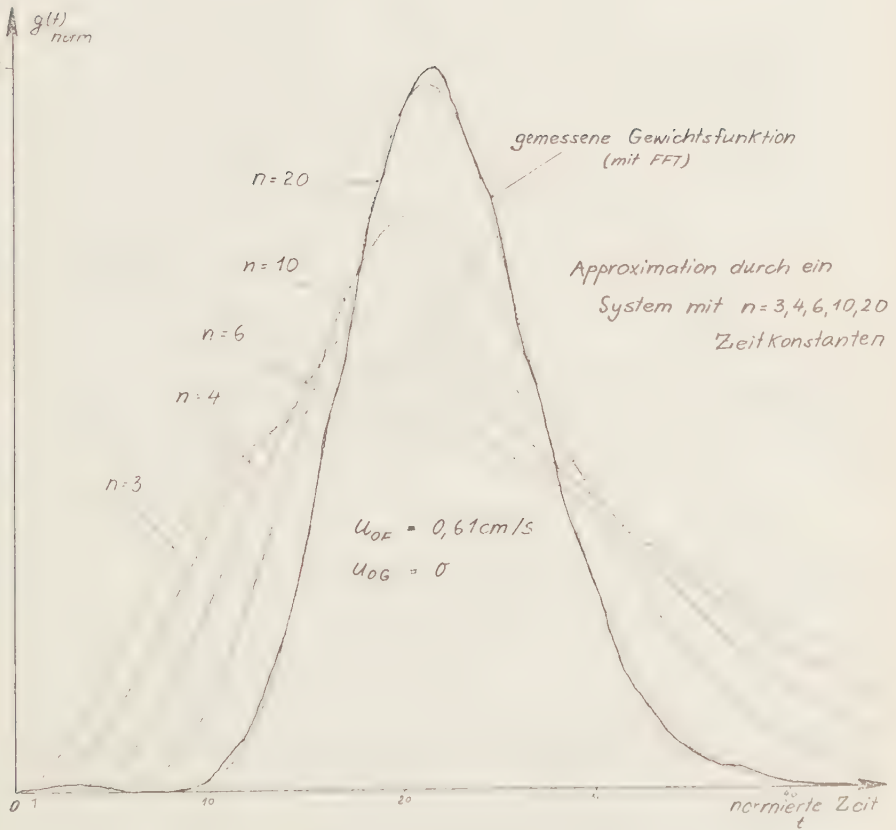


Bild 59 : Gemessene und approximierte Gewichtsfunktionen (einphasig)
 (FFT: Leistungsdichtespektrum mit Schneller Fourier-Transformation)

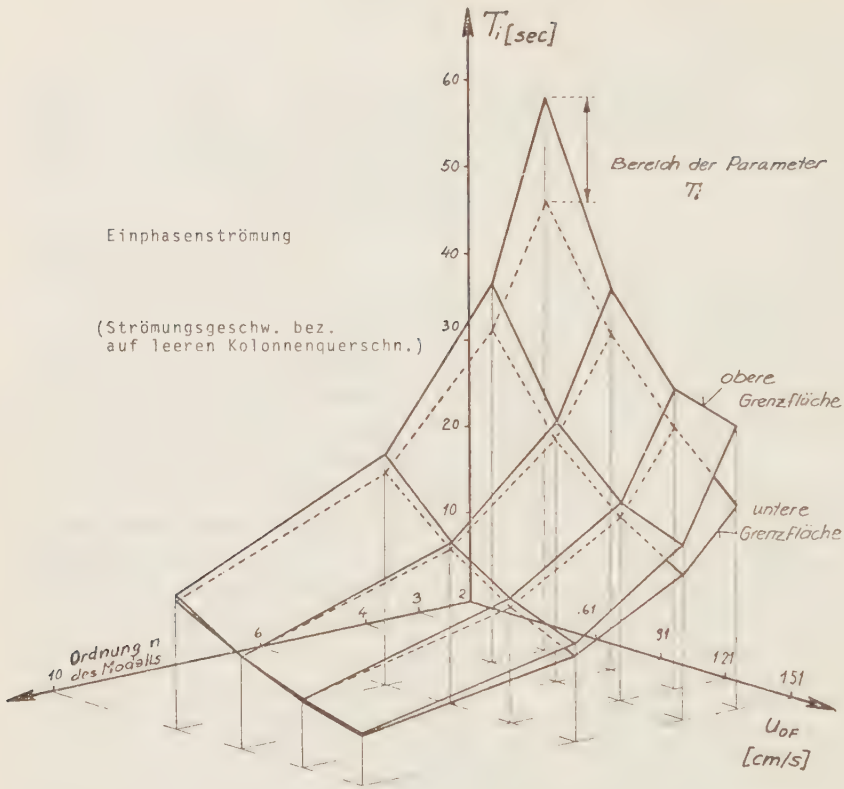


Bild 60: Verlauf der Zeitkonstanten T_i bei Variation der Modellordnung und der Strömungsgeschwindigkeit u_{0F}

T_n/s : Zeitkonstante: $T_n = \frac{1}{G_T} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ und $G_T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - 1)^2$				
u_{0F}	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 10$
0,61 cm/s	57,63 ± 6,77	46,77 ± 2,71	25,83 ± 6,25	14,93 ± 0,24
0,91 cm/s	41,25 ± 2,62	29,83 ± 1,15	18,19 ± 0,37	10,52 ± 0,08
1,21 cm/s	32,50 ± 2,92	22,01 ± 0,98	13,61 ± 0,52	7,83 ± 0,08
1,51 cm/s	27,87 ± 4,49	18,12 ± 1,84	10,75 ± 0,60	5,97 ± 0,16

Bild 61: Zeitkonstanten T_n in Abhängigkeit von Strömungsgeschwindigkeit u_{0F} und Modellordnung n (Einphasenströmung)

der Modellvorstellung berechneten Systemantworten immer mehr aneinander angleichen. Für $n=20$ ist praktisch keine Abweichung der Approximation von den Meßwerten mehr festzustellen. Der ML-Algorithmus zeigte dabei mit zunehmender Ordnungszahl n eine immer geringere Bewertungssumme $V(\underline{\theta})$, Bild 62.

U_{OG}	U_{OF}	Bewertungsfunktion $V(\underline{\theta})$			
		$n=3$	$n=4$	$n=6$	$n=10$
0,00cm/s	0,61cm/s	16,03	14,51	13,10	11,79
	0,91cm/s	11,47	9,45	6,47	3,54
	1,21cm/s	13,73	11,93	9,15	5,51
	1,51cm/s	11,75	11,09	9,87	7,72
0,61cm/s	0,61cm/s	7,47	5,86	3,40	1,17
	0,91cm/s	3,74	2,69	1,87	2,81
	1,21cm/s	9,65	7,75	4,99	2,16
	1,51cm/s	17,18	12,77	6,61	3,14
0,91cm/s	0,61cm/s	4,19	2,49	1,51	4,23
	0,91cm/s	7,62	6,19	4,03	1,74
	1,21cm/s	8,97	8,07	6,55	4,06
	1,51cm/s	18,22	15,57	11,44	6,12
1,21cm/s	0,61cm/s	17,10	12,23	5,04	4,93
	0,91cm/s	13,79	10,43	5,57	3,41
	1,21cm/s	9,36	7,58	5,07	2,54
	1,51cm/s	17,20	15,65	12,89	8,52

Bild 62 : Bewertungsfunktion $V(\underline{\theta})$

Kritisch angemerkt werden muß dabei, daß zur Bestimmung der $4n+2=82$ unbekannten Parameter im Falle eines Systems mit der Ordnung $n=20$ eine i.a. unzumutbare Rechenzeit von etwa 6 Stunden nötig war. Bei den weiteren Auswertungen wurde daher nur bis zur Ordnung $n=10$ gegangen, was - wie an den Beispielen sichtbar werden wird - zu genügend guten Näherungen führte. Eine Auflistung der Zählerkoeffizienten der bestimmten Übertragungsfunktionen wird nicht angefügt, da sie im Vergleich zum Term nullter Ordnung vernachlässigbar klein waren. Dieser wiederum besitzt eine vergleichsweise

geringe Aussagekraft, da er im wesentlichen nur die effektiven Verstärkungen der Meßaufnehmer widerspiegelt und damit keine Systemkennzeichnung beinhaltet.

Ähnlich wie für den reinen Flüssigkeitsreaktor kann für den Zweiphasenbetrieb ein Diagramm - Bild 63 - gezeichnet werden, das die Abhängigkeit

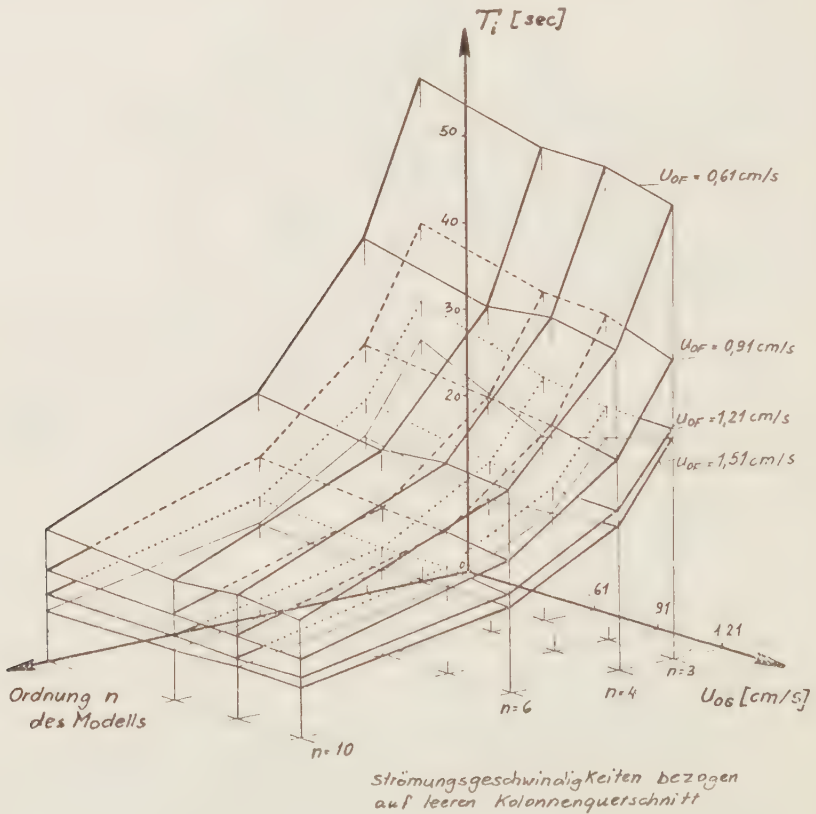


Bild 63: Mittelwerte der Zeitkonstanten T_i als Funktion der Strömungsgeschwindigkeiten von Gas- und Flüssigphase.

der mittleren Zeitkonstanten T_n von Gas- und Flüssigphasengeschwindigkeit beschreibt (als Grenzprofil ist hier natürlich auch Bild 60 enthalten). Die numerischen Werte sind in der Tabelle von Bild 64 enthalten.

u_{OG}	u_{OF}	Zeitkonstante: (s)			
		n=3	n=4	n=6	n=10
0,61 cm/s	0,61 cm/s	54,14±3	37,41±1,22	23,41±0,32	13,61±0,05
	0,91 cm/s	37,90±1,26	26,89±0,52	17,01±0,18	9,76±0,12
	1,21 cm/s	28,08±1,62	19,59±0,70	12,36±0,21	7,16±0,04
	1,51 cm/s	21,22±0,96	15,05±0,41	9,59±0,10	5,56±0,02
0,91 cm/s	0,61 cm/s	54,26±1,47	38,28±0,48	24,36±0,14	14,17±0,18
	0,91 cm/s	37,19±2,51	25,92±1,08	16,35±0,52	9,51±0,06
	0,21 cm/s	26,67±1,93	18,96±0,92	12,13±0,33	7,09±0,08
	1,51 cm/s	23,1 ±1,80	15,82±0,79	9,8 ±0,26	5,62±0,06
1,21 cm/s	0,61 cm/s	52,14±2,15	36,6 ±0,84	23,16±0,16	13,41±0,07
	0,91 cm/s	34,43±1,84	24,28±0,77	15,44±0,19	8,99±0,05
	1,21 cm/s	26,70±1,6	18,67±0,7	11,81±0,22	6,87±0,05
	1,51 cm/s	25,21±3,24	16,53±1,32	9,86±0,42	5,51±0,1

Bild 64: Zeitkonstanten T_n in Abhängigkeit von den Strömungsgeschwindigkeiten u_{OF} bzw. u_{OG} und der Modellordnung n

Zur besseren Übersichtlichkeit zeigt Bild 65 in doppeltlogarithmischer Darstellung $T=T(u_{OF}, u_{OG})$. Eine kurze Regressionsrechnung gibt daraus formelmäßig

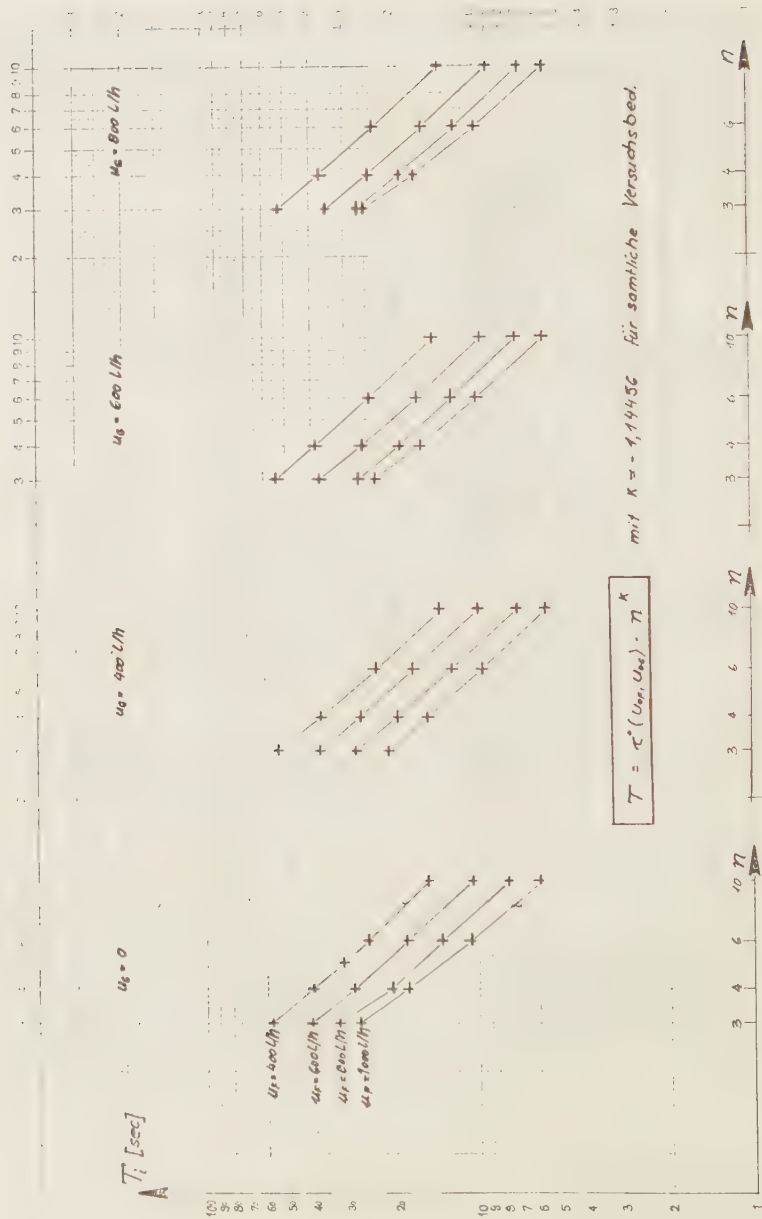
$$T = c^*(u_{OF}, u_{OG}) \cdot n^k \quad (153)$$

Der Exponent folgt dabei zu

$$k = -1,14456$$

für sämtliche Versuchsbedingungen. Den experimentell ermittelten Verlauf von $c^*(u_{OF}, u_{OG})$ zeigt Bild 66. Aus der halblogarithmischen Darstellung folgt mit einer Geradenapproximation näherungsweise der Zusammenhang

$$u_{OF} = b(u_{OG}) \cdot a^{-c^*(u_{OF}, u_{OG})} \quad (154)$$



Ordnung des Modells

Bild 65: Verlauf der Zeitkonstanten bei Variation der Strömungsgeschwindigkeit

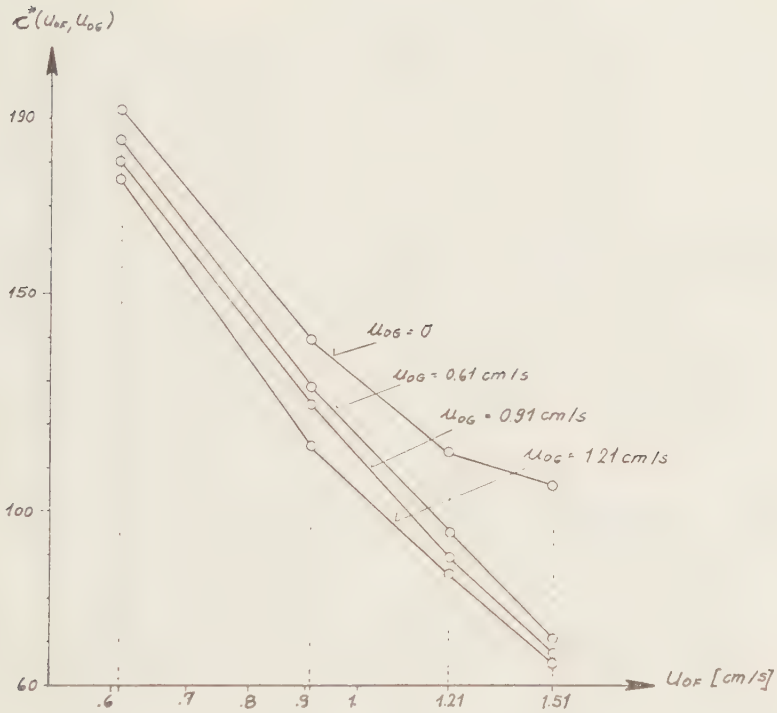


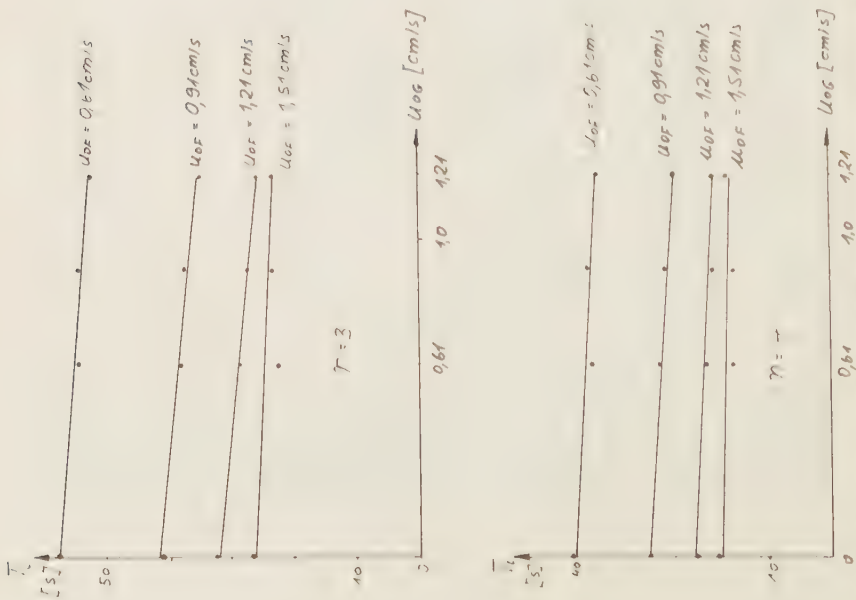
Bild 66 : Verlauf von $c^*(u_{oF}, u_{oG})$

mit

$b = 2,37$	für	$u_{oG} = 1,21 \text{ cm/s}$,
$b = 2,6$	"	$u_{oG} = 0,91 \text{ cm/s}$,
$b = 2,7$	"	$u_{oG} = 0,61 \text{ cm/s}$,
$b = 2,96$	"	$u_{oG} = 0,00 \text{ cm/s}$

und $a = 1,0073$.

Wegen der relativ geringen Anzahl der Meßpunkte kann Gl.154 nur als grobe Abschätzung des Verlaufs von $c^*(\cdot)$ bezeichnet werden. Zur Verdeutlichung der Ergebnisse geben die Diagramme von Bild 67 für feste Werte n die

Bild 67: Einfluss von U_{05} auf T_c bei verschiedener Überwindung des Meeres

Verläufe von T_i in Abhängigkeit von u_{OG} und u_{OF} wieder (sie entstehen als Schnittlinien der T_i -Profile von Bild 63 mit Ebenen parallel zur T_i - u_{OG} -Ebene). Ein Vergleich der mit Hilfe des Faltungsintegrals -Gl.38- numerisch bestimmten Gewichtsfunktionen und den nach der diskreten Modellvorstellung der ML-Methode berechneten Näherungen ermöglichen Bilder 68a,b. Bild 68a zeigt, daß asymptotisch mit größer werdendem n die approximative Beschreibung besser wird. Im Gegensatz dazu ist in Bild 68b für $n=6$ ein Optimum erreicht: eine Erhöhung auf $n=10$ gibt wieder schlechtere Ergebnisse ($V(\underline{\theta})$ wird dabei wieder ansteigen). Es sei hier erwähnt, daß der Vergleich der Gewichtsfunktionen nur demonstrieren kann, wie gut die statistische Modellbildung nach der ML-Methode arbeitet, da durch sie nicht die Zeitverläufe wie z.B. die Gewichtsfunktion approximiert werden, sondern vielmehr eine Aussage über die Parameter eines Systems im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie bestimmt wird.

11.6. Abgrenzung und Wertung des statistischen Schätzverfahrens

Ausgehend von den gemessenen stark gestörten Eingangs/Ausgangssignalfolgen des dynamischen Systems "Aufstromkolonne wurde ein lineares Modell mit konstanten Parametern entwickelt. Alle auf das System einwirkenden Störungen sind in dem äquivalenten "Rauschen" $\varepsilon(t) = \lambda \cdot e(t)$ zusammengefaßt; dieses ist - verformt durch ein Formfilter, von dem nur die Struktur festliegt - additiv der ungestörten Ausgangsgröße überlagert. Die M.L.-Abschätzung minimisiert als Gütekriterium die Summe

$$V(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2, \quad ,$$

auch Verlust-, Bewertungs- oder Fehlerfunktion genannt, bezüglich des Parametervektors $\underline{\theta}$. Dies ist ein nichtlineares Extremwertproblem, da der zu minimisierende Fehler $\varepsilon(t) = \lambda \cdot e(t)$ in nichtlinearer Weise mit den gesuchten Parametern $\underline{\theta}$ verknüpft ist. Aus Gl.(88) folgt nämlich nach Anwendung der z-Transformation

$$Z\{y(t)\} = \frac{\beta_0 \cdot z^n + \beta_1 \cdot z^{n-1} + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 \cdot z^{n-1} + \dots + \alpha_n} \cdot Z\{u(t)\}$$

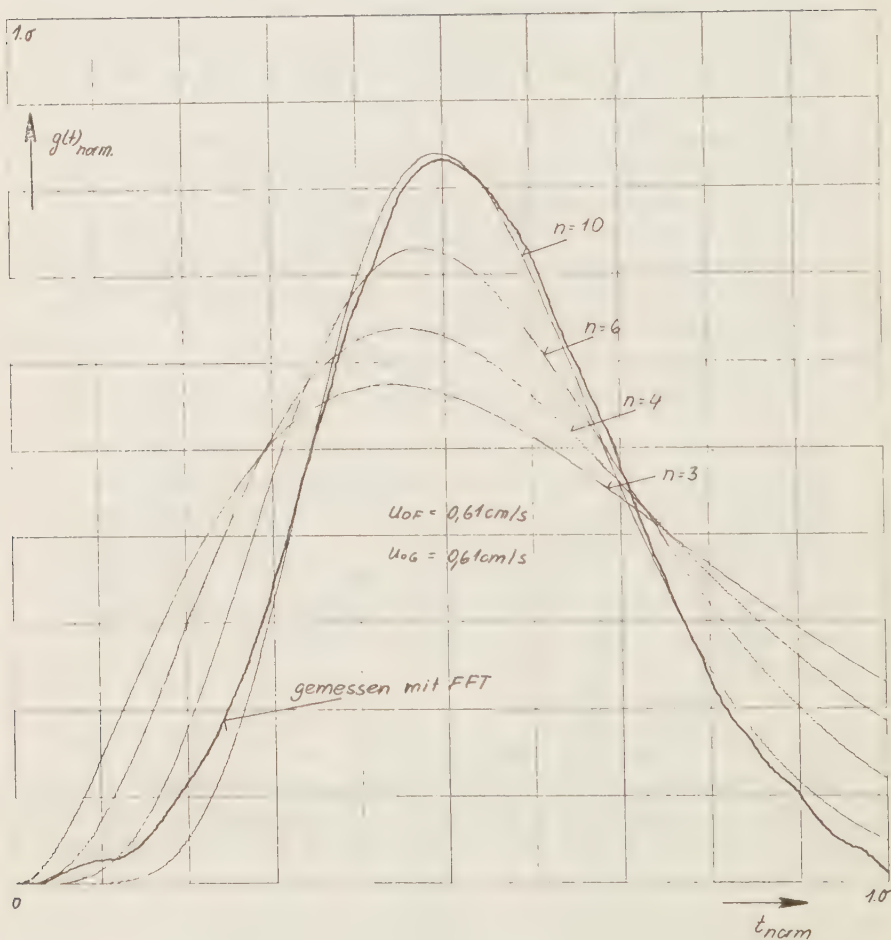


Bild 68a : gemessene und approximierte Gewichtsfunktionen
(FFT: Leistungsdichtespektrum mit Schneller-Fourier-Transformation)

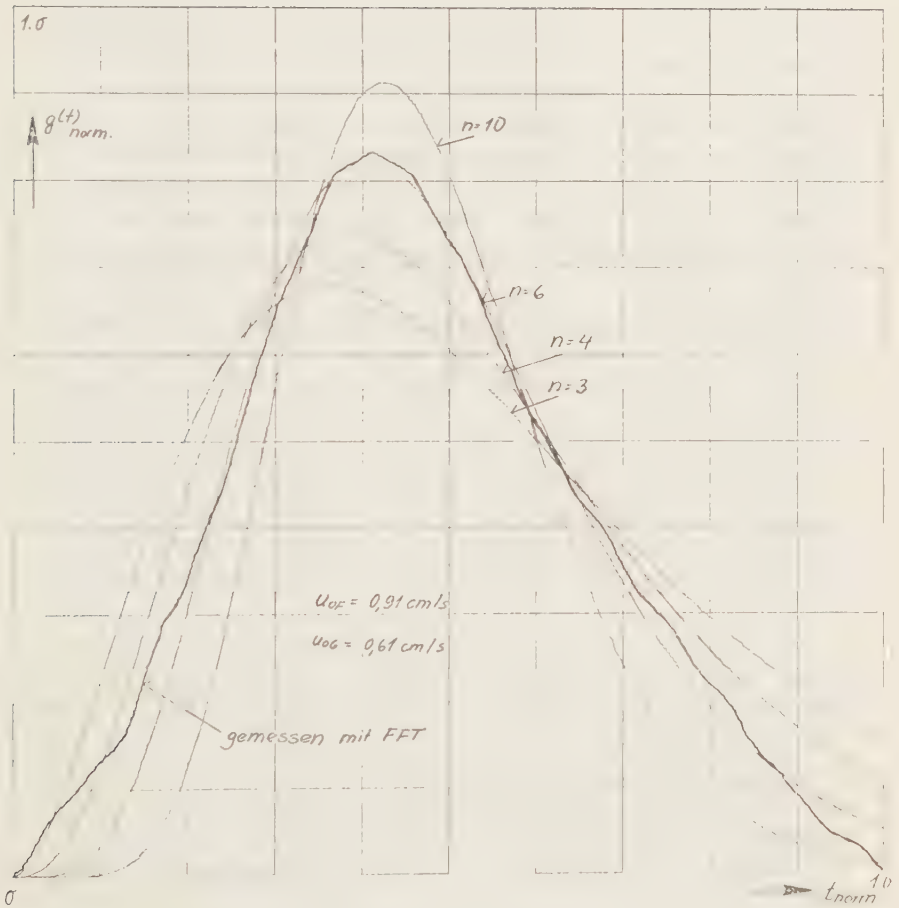


Bild 68b : gemessene und approximierte Gewichtsfunktionen
(FFT: Leistungsdichtespektrum mit Schneller Fourier-Transformation)

$$+ \frac{z^n + \alpha_1 \cdot z^{n-1} + \dots + \alpha_n}{z^n + \alpha_1 \cdot z^{n-1} + \dots + \alpha_n} \cdot Z\{\lambda \cdot e(t)\} + k$$

Die Lösung dieser Gleichung kann nicht geschlossen angegeben werden und erfordert daher besondere Algorithmen; als spezielle Lösungsmethode wurde der Newton-Algorithmus angewendet. Der entscheidende Vorteil der M.L.-Abschätzung ist in der Tatsache begründet, daß sehr kritische (unangenehme) Störungen wie Drifterscheinungen usw. im Ansatz des Modells automatisch berücksichtigt sind. Die M.L.-Methode trennt nach Gl.(87) stationäre und nichtstationäre Signalanteile, wodurch der stationäre Teil der Gl.(87) als Eingangs-Ausgangsbeziehung des stationären Modells interpretiert wird.

Nachteilig zeigt sich natürlich, daß der allgemeine statistische Ansatz eines Modells n-ter Ordnung sehr viele Parameter - $4n+2$ - enthält, wodurch die Rechenoperationen bei $n > 6$ besser in doppelter Genauigkeit durchgeführt werden sollten. Dies hat jedoch leider zur Folge, daß die Rechenzeit für $n > 10$ sehr groß wird. Bei Abwägung von Rechenzeit und Genauigkeit der Modellanordnung scheint die ML-Methode sehr vorteilhaft bei Systemen bis zur Ordnung $n=4$ zu sein; hier beträgt die Rechenzeit selbst bei sehr hoher Datenzahl N nur wenige Minuten. Das Approximationsergebnis wird dann je nach Anfangsbedingung in drei bis sechs Iterationsschriften erhalten.

Bisher wurde das vorgestellte Verfahren als OFF- LINE-Identifikationsverfahren beschrieben/55/. Eine Erweiterung auf die direkte ON-LINE-Analyse ist wegen der sequentiellen Rechentechnik ohne weiteres möglich. Sie wurde nach gewissen Modifikationen des digitalen Steuerprogramms erfolgreich mit Hilfe der Magnetplatte des Hybridrechners EAI 690 simuliert. Sofern die als einziges vorausgesetzte permanente Systemerregung durch $u(t)$ gewährleistet werden kann, ist aus den schon früher erwähnten Vorteilen der statistischen Testsignale auch die Identifizierung eines laufenden Prozesses möglich.

Abschließend sei noch kurz erwähnt, daß das entwickelte Rechenprogramm wegen seines relativ geringen Speicherbedarfs auch für kleinere Prozeßrechner wie sie immer mehr Eingang in die Prozeß-Überwachung und -Führung finden, geeignet erscheint.

Zusammenfassung

Voraussetzung für die Lösung regelungstechnischer Aufgaben an technischen Anlagen ist die Kenntnis des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke. Ausgehend von der untersuchten Aufstromkolonne sollte in der vorliegenden Arbeit auf zwei Wegen eine Kennzeichnung des dynamischen Verhaltens einer verfahrenstechnischen Anlage erreicht werden :

1. Bestimmung der Bodensteinzahl B_0 in Abhängigkeit von Gas- und Flüssigphasengeschwindigkeit; die Modellgleichung ist dabei eine partielle Differentialgleichung vom Diffusionstyp.
2. Entwicklung eines linearen statistischen Modells nach der Maximum-Likelihood-Methode; die Systemgleichung ist dabei eine lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung.

Bestmögliche Beschreibung des Originalsystems aufgrund physikalisch-chemischer Zusammenhänge auf der einen Seite und Einfachheit des Modells aus regelungstechnischer Sicht auf der anderen Seite waren dabei die beiden Entwurfskriterien. Während im ersten Fall - nach einer leider notwendigen sorgfältigen Störbefreiung - Leistungsdichtespektren bzw. Gewichtsfunktionen bestimmt wurden, konnten bei der ML-Methode die vielfältigen Störeinflüsse im Modellansatz selbst berücksichtigt werden. Sofern die Ordnung des Modells nicht zu groß gewählt wurde, ergaben sich - wie eine Auswahl der Meßschriebe zeigte - selbst im Hinblick auf die Rechenzeit recht gute Ergebnisse. Vorteilhaft war dabei, daß aufgrund des Rechenalgorithmus auch ON-LINE-Auswertungen simuliert werden konnten.

Einen besonderen Akzent erhielten die Untersuchungen dadurch, daß mit Hilfe einer hybriden Rechnerkonfiguration auch die Fragen der Reaktorabschlüsse der Meßanordnung betrachtet werden konnten. Hierbei ließen sich durch - hier nur kurz skizzierte - Simulationsanordnung interessante Ergebnisse erzielen/66/. Darüberhinaus zeigen die Untersuchungen Möglichkeiten der Anwendung einer sehr komfortablen Rechenanlage, wobei der Experimentator trotz der weitgehend automatisch ablaufenden Arbeitszyklen zahlreiche Eingriffsmöglichkeiten besitzt und damit auf vielfältige Weise den jeweiligen Gegebenheiten anpaßte Analyse-Maßnahmen vornehmen kann.

Literatur

- / 1/ Hofmann, H. : Der derzeitige Stand bei der Vorausberechnung der Verweilzeitverteilung in technischen Reaktoren, Chem.Engng. Sci. 14, 193-208 (1961)
- / 2/ Molerus, O. : Über die Exialvermischung bei Transportprozessen in kontinuierlich betriebenen Apparaturen, Chemie-Ingenieur-Technik (38) 1966, Heft 2, S.137-145
- / 3/ Oppelt, W., + Wicke, E., Grundlagen der chemischen Prozeßregelung, R.Oldenbourg, 1964
- / 4/ Molerus, O. : Stochastisches Modell der Gleichgewichtssichtung Chemie-Ingenieur-Technik, (39), Heft 13, (1967 S. 792-796
- / 5/ Jazwinski, A.H., Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, N.Y. & London, 1970
- / 6/ Gnedenko, B.W., Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Akademie-Verlag, Berlin
- / 7/ Böxkes, W., Diplomarbeit, Universität Erlangen, 1967
- / 8/ Böxkes, W., Systemanalyse bei chemischen Reaktoren, Diss. 1973, Universität Erlangen.
- / 9/ Bär, W., Zur Analyse einphasig durchströmter Schütttschichten mit Rauschsignalen, msr 14(1971), H.12, S.459-464
- /10/ Chang, C., Studien- und Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1965
- /11/ Heilmann, W., Zur Dynamik zweiphasig durchströmter Schütttschichten, Diss., Universität Erlangen, 1969
- /12/ Bischoff, K.B., Diss., Chicago, 1961
- /13/ Levenspiel, O., Chemical Reaction Engineering, Wiley,N.Y. (1962)
- /14/ van der Laan, E.Th., CES 7 (1958) , s. 187
- /15/ Willinger, R., Diplomarbeit am Institut für Regelungstechnik der Universität Erlangen, 1971, vom Verfasser betreut
- /16/ Oppelt,W., Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, Verlag Chemie, Weinheim, 1972
- /17/ Mesch, F., Vergleich von Frequenzgangmeßverfahren bei regellosen Störungen, msr 7, Heft 4, 1964
- /18/ Schlitt, H., Anwendung statistischer Verfahren in der Regelungs-technik, Oldenbourg 1962

- /19/ Schlitt, H. + Dittrich, F., Statistische Methoden der Regelungstechnik, BI-Verlag, Bd. 526, 1972
- /20/ Korn, N., Ein Beitrag zur Behandlung von Regelkreisen mit stochastischen Eingangssignalen beliebiger Verteilung, Diss. TH Hannover 1966
- /21/ Schlitt, H., Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen, Vieweg-Verlag 1968
- /22/ Bendat, J.S., Piersol, A.G., Random Data : Analysis and Measurement Procedure, Wiley, N.Y., 1971
- /23/ Wüpper, A., Bestimmung der Verteilungsdichtefunktion gemessener Eingangs/Ausgangssignalfolgen einer Füllkörperkolonne, Studienarbeit am IRT der Universität Erlangen, vom Verfasser betreut.
- /24/ Bär, W., Zweiter Zwischenbericht zum Forschungsvorhaben Schl 75/11, DFG, 1970, Die Möglichkeiten der statistischen Systemanalyse zur Untersuchung von Regelkreisen
- /25/ Papoulis, A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, MacGraw-Hill, 1965
- /26/ Bendat, J.S., Piersol A.G., Measurement and Analysis of Random Data, Wiley, N.Y., 1966
- /27/ Pethö, A., Notes on the determination of the residence time distribution in continuous flow systems, CES, 1968, Vol 23, pp. 807-810
- /28/ Danckwerts, P.V., continuous flow systems, CES, Vol 2, 1953 pp. 1-13
- /29/ Levenspiel, O. + Smith, W.K., Notes on the diffusion-type model for longitudinal mixing in flow, CES, 1957, Vol 6, pp. 227-233
- /30/ Aris, R., Notes on the diffusion-type model for longitudinal mixing in flow, CES, 1959, Vol 9, pp. 266-267
- /31/ Bischoff, K.B. + Levenspiel, O., Fluid dispersion-generalisation and comparison of mathematical models, CES, 1962, Vol. 17, pp. 245-264
- /32/ Meier, C., Simulation eines Systems mit örtlich verteilten Parametern auf einem Hybridrechner, Diplomarbeit am IRT der Universität Erlangen, 1973, vom Verfasser betreut
- /33/ Bronstein, I.N. + Semandjajew, D.A., Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch, Ffm, 1962
- /34/ Bär, W., Einführung in das Hybridrechnen, Vorlesungsmanuskript, WS 1972/73, Universität Erlangen

- /35/ Bekey, G.A. + Karplus, E.J., Hybrid Computation, Wiley N.Y., 1968
- /36/ Vichnevetsky, R., A new stable computaing method for the serial hybrid computer integration of partial differential equations, Proc. AFIPS Spring Joint Computer Conference May 1968
- /37/ Blandhol, E., et. al., Adiscription of the statistical computer "ISAC", Nov. 1959
- /38/ Marquardt, D.W., Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, IBM-Share-Library, Distribution No. 3094, March 1965
- /39/ Bär, W., Methode Marquardt (IBM), Bibliothek des Hybridrechenzentrums des IRT der Universität Erlangen, Juni 1972
- /40/ Marquardt, D.W., An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, J. Soc. Indust. Appl. Math., 11,(1963)
- /41/ Hoffmann, U. + Hofmann, H., Einführung in die Optimierung, Verlag Chemie, 1971
- /42/ Welch, P.D., A Direct Digital Method of Power Spectrum Estimation IBM Journal, April 1961
- /43/ Cooley, J.W. + Tukey, J.W., An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Math. Comp.,April 1965
- /44/ Fast-Fourier-Transform, IEEE, AU-15, June 1967
- /45/ Bär, W., FFT-Programm "four 2" aus der USASI-Bibliothek, zugeschnitten für EAI 640, Programmbibliothek des Hybridrechenzentrums des IRT der Universität Erlangen
- /46/ Kölbel, H., Beinhauer, R., Langemann, H., Chemie-Ingenieur-Technik, 44 (1972), S.697, Dynamische Messungen des relativen Gasgehaltes in Blasensäulen mittels Absorption von Röntgenstrahlen
- /47/ Korfmann, H., Diss., TU Berlin 1968
- /51/ Kuo, B.C., Discrete-Data-Control System, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1970
- /52/ Liff, A.I., System Identification in the PResence of Noise by Digital Techniques, 1966, IEEE Internat'l Cov.Rec., Vol.14, pt. 6, pp 152-166
- /53/ Ragazzini, J. + Franklin, G., Sampled-Data Control Systems McGraw-Hill, 1958

- /54/ Aström, K.J., Numerical Identification of linear dynamic Systems from normal operating records, Proceedings of the 2. IFAC Symposium on the Theorie of Self-Adaptive Control Systems, Sept. 1965, Teddington, England
- /55/ Fisher, R.A., Theory of statistical estimation, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 22, (1925)
- /56/ Cramer, H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton (1971)
- /57/ Huzurbazar, V.S., The Likelihood Equation, Consistency and the Maxima of the Likelihood Function, Ann. Eugen., 14, p. 185
- /58/ Bohlin, T., On the Problem of Ambiguities in Maximum Likelihood Identification, 2. Prague IFAC Symposium, 1970, Identification and Process Parameter Estimation
- /59/ Wilks, S., Mathematical Statistics, Wiley, N.Y.+ London, 1962
- /60/ Schwarz, H., Mehrfachregelungen II, Springer-Verlag
- /61/ Gelfond, A., Differenzenrechnung, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1958
- /62/ Aström, K.J., Bohlin, T., Wensmark, S., Automatic Construction of Linear Stochastic Dynamic Models for Stationary Industrial Processes with Random Disturbances Using Operating Records, IBM-Report 1967
- /63/ Kalman, R.E., Design of a Self-Optimizing Control System Trans. ASME, (1958)
- /64/ Gitt, W., Parameterbestimmung an linearen Regelstrecken mit Hilfe von Kennwertsortkurven für Systemantworten deterministischer Testsignale, Diss., TH Aachen, 1970
- /65/ Unbehauen, H., Göhring, B., Modellstrukturen und numerische Methoden für statistische Parameterschätzverfahren zur Identifikation von Regelsystemen, rt, 1973, Heft 1
- /66/ Bär, W., Meier, C., Zur Simulation des dynamischen Verhaltens von Diffusions-Reaktoren mit einem Hybridrechner, erscheint demnächst in der Zeitschrift Regelungstechnik

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Abkürzungen

- in der Reihenfolge ihres Auftretens -

Teil I :

$c(t), C(s)$	Konzentration	$[c] = \text{Mol/cm}^3$
t	Zeitkoordinate	$[t] = s$
z	Ortskoordinate	$[z] = \text{cm}$
ε_j	Volumenanteil der Phase j;	
c_{ij}	Konzentration der i-ten Komponente in der Phase j; $[c_{ij}] = \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3}$	
v_j	Geschwindigkeitsvektor der Phase j; $[v_j] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$	
$D_{\text{eff}j}$	effektiver Diffusionskoeffizient; $[D_{\text{eff}j}] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	
ν_i	stöchiometrische Umsatzzahl der i-ten Komponente	
r_{eff}	effektive Reaktionsgeschwindigkeit; $[r_{\text{eff}}] = \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3 \text{s}}$	
$\bar{c}_{pi}$	mittlere Molwärme $= \sum_{i=1}^m x_{ij} C_{pij}$ $[\bar{C}_{pj}] = \frac{\text{kcal}}{\text{kmol} \cdot ^\circ\text{K}}$	
	$x = \text{Molanteil}$	
c_{gj}	Gesamtkonzentration; $[c_{gj}] = \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3}$	
T	Temperatur; $[T] = ^\circ\text{K}$	
$\lambda_{\text{eff}j}$	effektive Wärmeleitzahl; $[\lambda_{\text{eff}j}] = \frac{\text{kcal}}{\text{m s } ^\circ\text{K}}$	
ΔH	Reaktionsenthalpie; $[\Delta H] = \frac{\text{kcal}}{\text{kmol}}$	
$\text{Pr}\{\dots\}, P(\dots)$	Wahrscheinlichkeit	
$p_x(\dots)$	Wahrscheinlichkeitsdichte, Verteilungsdichtefunktion	
$p(z_n z_{n-1})$	bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte	
$\delta(t)$	Deltafunktion	
$N(0, \sigma)$	normalverteiltes Rauschsignal mit Mittelwert = Null und Streuung	
$\phi_{xy}(\tau), \text{KKF}$	Kreuzkorrelationsfunktion	
$\phi_{xx}(\tau), \text{AKF}$	Autokorrelationsfunktion	
ips	Geschwindigkeit : inch per second	
D	axialer Diffusionskoeffizient, Mischkoeffizient $[D] = \text{cm}^2/\text{s}$	
x	normierte Ortskoordinate $x = z/L$	
η	normierte Zeitkoordinate $\eta = v \cdot t/L$	

L	charakteristische Reaktorlänge, Länge des Reaktors	[L] = cm
$B_0 = v \cdot L / D$	Bodensteinzahl	
v	Strömungsgeschwindigkeit	[v] = 1/h
$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\pi} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf} z$		
CSDT	Continuous Space-Continuous Time	
DSCT	Discrete Space-Continuous Time	
CSDT	Continuous Space-Discrete Time	
DSDT	Discrete Space-Discrete Time	
ADC	Analog-zu-Digital-Converter	
DAM	Digital-Analog-Multiplizierer	
IC	Anfangsbedingung	
Analog-time-scale	Zeitmaßstab des Analogrechners	
SL	Sense Line, Analogsignal, das vom Digitalrechner abgefragt und dabei auf Null gesetzt wird: Synchronisation vonseiten des Analogrechners.	
OCL	Operation Control Line, Digitalsignal, das vom Analogrechner abgefragt und bei Bedarf zurückgesetzt werden kann: Synchronisation vonseiten des Digitalrechners	
TT $\equiv$ Teletype	Konsole des Rechensystems	
PB	Push Button, logisches Signal des Analogrechners	
BCD	Binär Codierter Dezimalzähler	
T/S	Track Store, Abtasthalteglied	
S/H	Sample Hold, Abtasthalteglied	
D/A-switch	schneller elektronischer Schalter, der von log. Signalen des Analogrechners beeinflusst werden kann	
$\{u_i\}$	Eingangssignalfolge	
N	Anzahl der Meßdaten	
$f_{ab} = 1/h$	Abtastfrequenz	$[f_{ab}] = \text{Hz}$
h	Abtastintervall	$[h] = \text{s}$
blip	Impuls der Länge 10^{-6} s, mit der Analogrechner Zeittrasterung synchronisiert	
$g(\cdot)$	Gewichtsfunktion	
$\mathcal{F}$	Operator der Fouriertransformation	

$S_{xx}(\omega), S_{xy}(\omega)$	Leistungsdichtespektrum	
$f_c = 1/2h$	Eckfrequenz nach Abtasttheorem $[f_c] = \text{Hz}$	
f_o	höchste vorkommende Frequenz	
f_d	höchste vorkommende noch signifikante Datenfrequenz	
f_{eck}	3 dB - Eckfrequenz eines Systems	
T	Meßzeit	$[T] = \text{s}$
B_e	effektive Bandbreite	$[B_e] = \text{Hz}$
$\{x_i\}, \{y_i\}$	gemessene Signalfolgen	
$E\{ \cdot \}$	Erwartungswert	
$\chi^2 -$	Chi-quadrat-Verteilungsdichte	
$\text{Var}\{ \cdot \}$	Varianz	
$\text{Re}\{ \cdot \}$	Realteil einer komplexen Größe	
$\text{Im}\{ \cdot \}$	Imaginärteil einer komplexen Größe	
u_{oF}, u_{oG}	effektive Strömungsgeschwindigkeiten bezogen auf den leeren Kolonnenquerschnitt	
	$F \hat{=}$ Flüssigphase	
	$G \hat{=}$ Gasphase	$[u_o] = \text{cm/s}$

Teil II :

$G(s)$	Übertragungsfunktion eines linearen Systems mit der Gewichtsfunktion $g(t)$
Z	Operator : idealer Abtaster Operator der Z-Transformation
Z^{-1}	inverser Z-Operator : idealer Rekonstruierer
z	Argument der Z-Übertragungsfunktion
$M(z)$	Z-Übertragungsfunktion der Modellvorstellung
$I(z)$	realer Interpolierer
$\{u_i\}, \{y_i\}$	gemessenen Signalfolgen
$\{e_i\}$ bzw. $e(t)$	Störsignalfolge
$\underline{z}$	Zustandsvektor, n-dimensional
n	Ordnung der Modellvorstellung
$\underline{\theta}$	Parametervektor, siehe Gl.(98)
M.L. bzw. ML	Maximum-Likelihood

MLM	Maximum-Likelihood-Methode
$L(\dots)$	Likelihoodgleichung
$V(\underline{\theta})$	Bewertungs-, Verlust-, Fehlerfunktion
$V_{\theta}(\underline{\theta})$	n-Vektor der ersten Ableitungen von V nach θ_i
$V_{\theta\theta}(\underline{\theta})$	n x n-Matrix der zweiten Ableitungen nach θ_i
L.P.	Unterprogramm

Lebenslauf

Persönliches

Wolfgang Bär, geboren am 4. April 1941 in Frankfurt am Main als Sohn des städtischen Angestellten Ernst Bär und seiner Ehefrau Berta, geb. Wagner. Seit 1969 verheiratet mit der Lehrerin Helga Weißenberger. Im Oktober 1972 Geburt des Sohnes Werner.

Schulbildung

1947 - 1952 Volksschule in Frankfurt am Main-Nied
1952 - 1961 Gymnasium in Frankfurt am Main-Höchst.
Reifeprüfung Ostern 1961

Praktische Tätigkeit

Industriepraktikum vor und während des Studiums bei den Firmen Hartmann & Braun AG, Frankfurt/Main, Farbwerke Hoechst AG, Frankfurt/Main und Standard Telephon und Radio AG, Zürich.

Studium

Wintersemester 1961/62 bis Sommersemester 1967 Studium der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Studienarbeit aus dem Gebiet der Nachrichtenverarbeitung, Diplomarbeit aus dem Fachgebiet Regelungstechnik. Seit April 1963 Stipendiat der Bischöflichen Studienförderung Cusanuswerk.

Wissenschaftliche Tätigkeit

Juni 1967 bis Mai 1970 wissenschaftlicher Mitarbeiter (Bearbeiter eines DFG-Forschungsvorhabens), dann ab Mai 1970 wissenschaftlicher Assistent am Institut für Regelungstechnik der Universität Erlangen-Nürnberg. Seit Oktober 1971 mit der wissenschaftlichen Leitung des Hybridrechenzentrums des Instituts beauftragt.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hög, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990